Développement: $\mathbb{C}[X,Y]/(Y-X^2)$ et $\mathbb{C}[X,Y]/(XY-1)$ sont principaux

Adrien Fontaine

8 avril 2013

Référence : Serge Francinou, Hervé Gianella, Exercices de Mathématiques pour l'agrégation, Algèbre 1

1 $\mathbb{C}[X,Y]/(Y-X^2)$ est principal

Le polynôme $Y-X^2$ est irréductible dans $\mathbb{C}[X,Y]$ car irréductible dans $\mathbb{C}[X][Y]$ (unitaire de degré 1). Donc, $(Y-X^2)$ est premier ($\mathbb{C}$ est factoriel, donc $\mathbb{C}[X,Y]$ aussi, donc les notions d'élément premiers et irréductibles coïncident dans $\mathbb{C}[X,Y]$). Donc, $\mathbb{C}[X,Y]/(Y-X^2)$ est intègre.
Soit $\psi : P(X,Y) \in \mathbb{C}[X,Y] \mapsto P(T,T^2) \in \mathbb{C}[T]$. ψ est un morphisme d'anneau. De plus, comme $\psi(X) = T$, ψ est surjectif.
Il est par ailleurs clair que $(Y-X^2) \subset Ker(\psi)$.
Montrons l'inclusion réciproque. Soit $P(X,Y) \in Ker(\psi)$. On remarque que le coefficient dominant de $Y-X^2$ en tant qu'élément de $\mathbb{C}[X][Y]$ est 1, qui est donc inversible dans $\mathbb{C}[X]$. Donc, on peut effectuer la division euclidienne de $P(X,Y)$ par $Y-X^2$.
Donc, il existe $Q(X,Y)$ et $R(X,Y) \in \mathbb{C}[X,Y]$ tels que

$$P(X,Y) = (Y-X^2)Q(X,Y) + R(X,Y)$$

avec de plus $deg_Y(R) = 0$. Autrement dit, $R(X,Y) = R(X) \in \mathbb{C}[X]$. On a alors :

$$\psi(P) = 0 = P(T,T^2) = R(T)$$

Donc, $R = 0$ et $P \in (Y-X^2)$. D'où, l'inclusion réciproque.
On a donc un isomorphisme

$$\mathbb{C}[X,Y]/(Y-X^2) \simeq \mathbb{C}[T]$$

Or, $\mathbb{C}[T]$ est principal (il est même euclidien puisque $\mathbb{C}$ est un corps).

2 $\mathbb{C}[X,Y]/(XY-1)$ est principal

De même que précédemment, $XY-1$ est irréductible dans $\mathbb{C}[X,Y]$, donc $\mathbb{C}[X,Y]/(XY-1)$ est intègre.
On considère le morphisme d'anneau $\psi : P(X,Y) \in \mathbb{C}[X,Y] \mapsto P(T, \frac{1}{T}) \in \mathbb{C}(T)$.
On a clairement $(XY-1) \subset Ker(\psi)$.
Montrons l'inclusion réciproque. Soit $P(X,Y) \in Ker(\psi)$. Contrairement au cas précédent, on ne peut effectuer la division euclidienne de $P(X,Y)$ par $XY-1$ car ni X, ni Y ne sont inversibles

dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{C}[Y]$ respectivement. Pour remédier à cela, on se place dans $\mathbb{C}(X)[Y]$ (de telle sorte que désormais X est bien un élément inversible de $\mathbb{C}(X)$). On peut donc effectuer la division euclidienne (dans $\mathbb{C}(X)[Y]$!) :

$$P(X,Y) = (XY-1)Q(Y) + R(X)$$

où, Q est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{C}(X)$ et $R \in \mathbb{C}(X)$. En multipliant par $A(X)$, le ppcm du dénominateur de $R(X)$ et des dénominateurs des coefficients de Q, on obtient

$$A(X)P(X,Y) = (XY-1)Q_0(Y) + R_0(X)$$

Alors, si $\psi(P) = 0$, on a :

$$\psi(A(X)P(X,Y)) = A(T)\psi(P(X,Y)) = 0 = R_0(T)$$

Donc, $P \in (XY-1)$. Et donc, $Ker(\psi) = (XY-1)$.
Enfin, $Im(\psi) = \mathbb{C}[T, \frac{1}{T}]$.
Donc, $\mathbb{C}[X,Y]/(XY-1) \simeq \mathbb{C}[T, \frac{1}{T}]$.
Il nous reste à montrer que $\mathbb{C}[T, \frac{1}{T}]$ est principal. En fait, on va même montrer qu'il est euclidien, ce qui nous permettra de conclure.
Pour cela, notons $F = \{1, T, T^2, ..., T^k, ...\}$. On a alors :

$$\mathbb{C}[T, \frac{1}{T}] = \{\frac{P}{Q} \in \mathbb{C}(T), P \in \mathbb{C}[T], Q \in F\} := F^{-1}\mathbb{C}[T]$$

Montrons que $F^{-1}\mathbb{C}[T]$ est un anneau euclidien. Tout d'abord, il est clair que c'est un sous-anneau de $\mathbb{C}(T)$.
$\mathbb{C}[T]$ est principal, de stathme le degré. Soit $x \in F^{-1}\mathbb{C}[T]$. On note :

$$\nu(x) = inf\{deg(T^n x), n \in T^n x, \text{ et } T^n x \in \mathbb{C}[T]\}$$

x s'écrit $\frac{P}{T^k}$ avec $P \in \mathbb{C}[T]$, $P(0) \neq 0$ et $k \in \mathbb{N}$. Donc,

$$\nu(x) = \nu(\frac{P}{T^k}) = \inf_{n \geq k}\{deg(T^{n-k}P\} = \inf_{n \geq 0} deg(T^n P) = deg(P)$$

Montrons que $F-1\mathbb{C}[T]$ est euclidien pour ν. Soient $(x,y) \in F^{-1}\mathbb{C}[T]^2$, $y \neq 0$. On écrit x et y sous la forme $x = \frac{P}{T^{k_1}}$ et $y = \frac{Q}{T^{k_2}}$ avec $P_1(0)$ et $P_2(0) \neq 0$.
Alors,

$$\exists Q, R \in \mathbb{C}[T]/P_1 = QP_2 + R \text{ avec } deg(R) < deg(P_2)$$

Donc :

$$\frac{P}{T^{k_1}} = (Q\frac{T_{k_2}}{T_{k_1}})\frac{P_2}{T^{k_2}} + \frac{R}{T^{k_1}}$$

C'est à dire

$$x = y(Q\frac{T^{k_2}}{T^{k_1}}) + \frac{R}{T^{k_1}}$$

De plus,

$$\nu(\frac{R}{T^{k_1}}) \leq deg(R) < deg(P_2) = \nu(y)$$

Ce qui termine la preuve du fait que $F^{-1}\mathbb{C}[T]$ est euclidien.
En particulier, $\mathbb{C}[X,Y]/(XY-1)$ est euclidien, donc principal.