Développement: Critère de Weyl

Adrien Fontaine

23 octobre 2013

Référence : Oraux X-ENS, Analyse 2, exercice 1.28p47

Définition 1

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de $[0,1]$. Pour $0 \leq a < b \leq 1$, on pose

$$S_n(a,b) = Card\{k \in \{1,...,n\}, u_k \in [a,b]\}$$

On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équirépartie ssi $\frac{S_n(a,b)}{n}$ tend vers $b-a$ pour tout $0 \leq a < b \leq 1$.

Théorème 1 (*Critère de Weyl*)

On a équivalence entre :

1. *(u_n) est équirépartie.*
2. *Pour toute fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue, on a*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(u_k) = \int_0^1 f(t)dt$$

3. *Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{2i\pi p u_k} = 0$$

Démonstration : – (1) $\Rightarrow$ (2) : On a :

$$\frac{S_n(a,b)}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\chi_{[a,b]}(u_k)$$

où $\chi_{[a,b]}$ est la fonction caractéristique du segment $[a,b]$. Par ailleurs,

$$\int_a^b \chi_{[a,b]} = b-a$$

La propriété (2) est donc vérifiée pour les fonctions caractéristiques d'un segment. En fait, toute fonction en escalier f sur $[0,1]$ est combinaison linéaire de fonctions caractéristiques de segment (éventuellement réduits à un point pour obtenir les valeurs de f aux points de discontinuité). Par linéarité, la propriété (2) est donc vraie pour toute fonction en escalier. On va maintenant essayer de prolonger cette identité par densité pour les fonctions continues. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue et $\varepsilon > 0$. Alors, il existe une fonction g telle que

$\|f-g\|_\infty \leq \varepsilon$.[1] Soit $n \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned}&|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(u_k) - \int_0^1 f| \\ &\leq \underbrace{|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(f(u_k)-g(u_k))|}_{\leq\varepsilon} + |\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g(u_k) - \int_0^1 g| + \underbrace{|\int_0^1 g - \int_0^1 f|}_{\leq\varepsilon}\end{aligned}$$

Enfin, g étant en escalier, le terme du milieu tend vers 0 quand n tend vers l'infini (la propriété (2) est vérifiée pour les fonctions en escalier). Donc,

$$\limsup_{n\to+\infty} |\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(u_k) - \int_0^1 f| \leq 2\varepsilon$$

Et donc, (2) est vérifié.

– (2) $\Rightarrow$ (1) : Une fonction caractéristique d'un segment I (distinct de $[0,1]$) présente au moins une discontinuité, donc ne peut pas être obtenue comme limite uniforme de fonctions continues. En fait, on a pas besoin d'une approximation uniforme : il va suffire d'encadrer χ_I par deux suites de fonctions continues affines par morceaux qui convergent vers χ_I au sens de la norme intégrale. Prenons pour commencer un segment $I=[\alpha,\beta]$ avec $0<\alpha<\beta<1$.Pour $k\geq 1$ on définit deux fonctions ψ_k et ϕ_k continues sur $[0,1]$ comme suit : ψ_k (resp. ϕ_k) est nulle sur $[0,\alpha]\cup[\beta,1]$ (resp. sur $[0,\alpha-\frac{1}{k}]\cup[\beta+\frac{1}{k},1]$), constante égale à 1 sur $[\alpha+\frac{1}{k},\beta-\frac{1}{k}]$ (resp. sur $[\alpha,\beta]$) et affine partout ailleurs (faire un dessin).
Pour tout $p\in\mathbb{N}^*$, on a alors $\psi_p \leq \chi_{[\alpha,\beta]} \leq \phi_p$. Et donc, comme $\frac{S_n(\alpha,\beta)}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\chi_{[\alpha,\beta]}(u_k)$, on a pour tout $n\geq 1$,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\psi_p(u_k) \leq \frac{S_n(\alpha,\beta)}{n} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\phi_p(u_k) \tag{1}$$

Par hypothèse,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\psi_p(u_k) = \int_0^1 \psi_p = \beta-\alpha-\frac{1}{p}$$

et

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\phi_p(u_k) = \int_0^1 \psi_p = \beta+\alpha-\frac{1}{p}$$

Fixons $\varepsilon>0$ et $p\in\mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{p}<\varepsilon$. Alors, en passant à la $\underline{\lim}$ à gauche et à la $\overline{\lim}$ à droite dans l'inégalité (1), on obtient :

$$\beta-\alpha-\varepsilon \leq \underline{\lim}_{n\to+\infty} S_n(\alpha,\beta) \leq \overline{\lim}_{n\to+\infty} S_n(\alpha,\beta) \leq \beta-\alpha+\varepsilon$$

Donc,

$$\underline{\lim}_{n\to+\infty} S_n(\alpha,\beta) = \overline{\lim}_{n\to+\infty} S_n(\alpha,\beta) = \beta-\alpha$$

D'où, le résultat sauf au bord. Il suffit ensuite d'adapter les ψ_p et ϕ_p dans le cas ou $\alpha=0$ et/ou $\beta=1$ et on obtient la même chose.

– (2) $\Rightarrow$ (3) : C'est immédiat en décomposant $e^{2i\pi p u_k}$ en partie réelle et imaginaire, et en appliquant l'hypothèse (2).

1. voir Gourdon, Analyse, Proposition 5p97

– (3) ⇒ (2) : Par linéarité, on a la propriété (2) pour tout polynôme trigonométrique du type :

$$x \mapsto a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(2k\pi x) + \sum_{k=1}^{n} b_k \sin(2k\pi x)$$

(l'intégrale d'une telle fonction est a_0).
D'après le théorème de Weierstrass trigonométrique, toute fonction continue $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ vérifiant $f(0) = f(1)$ est limite uniforme d'une suite de polynômes trigonométriques de ce type. Comme précédemment, on en déduit que (2) est vérifié pour une telle fonction continue. Si f ne vérifie pas la condition $f(0) = f(1)$, on peut pour tout $\varepsilon > 0$ trouver une fonction continue g vérifiant $g(0) = g(1)$ et $\int_0^1 |f - g| \leq \varepsilon$ (sur un dessin, ça se voit bien). Comme dans l'implication (2) ⇒ (1), cela suffit pour prouver que (2) est aussi vraie pour f.

Les propositions (1), (2) et (3) sont donc toutes équivalentes. ■

Remarques :

- De manière informelle, une suite est dite équirépartie si pour tout intervalle I inclus dans $[0,1]$, la probabilité pour un terme de la suite d'être dans I est égale à la longueur de I.
- Le critère de Weyl correspond à l'équivalence des assertions (i) et (iii). Il a été démontré par Weyl en 1916.
- Il est clair qu'une suite équirépartie est dense dans $[0,1]$. En effet, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équirépartie, alors
$$\frac{S_n(a,b)}{n} \to b - a$$
Donc,
$$S_n(a,b) = Card\{1 \leq k \leq n, u_k \in [a,b]\} \to +\infty$$
Le segment $[a,b]$ contient donc une infinité de u_k, donc, en particulier, $[a,b] \cap \{u_k, k \in \mathbb{N}\} \neq \emptyset$. Donc, $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est dense dans $[0,1]$.
- La réciproque est cependant fausse. En effet, on peut montrer que la suite $(|\sin(n)|)_{n\in\mathbb{N}}$ est dense dans $[0,1]$ mais n'est pas équirépartie. Intuitivement, cela vient du fait que la suite $|\sin(n)|$ stationne plus longtemps sur certaines valeurs.[2]
- Voici un exemple d'application du critère de Weyl avec l'étude des suites arithmétiques. On dit qu'une suite réelle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équirépartie modulo 1 si la suite $u_n = x_n - E(x_n)$ est équirépartie. Le critère de Weyl donne donc :
$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ équirépartie modulo 1 } \iff \forall p \in \mathbb{N}^*, \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} e^{2i\pi p x_k} = 0$$
On a alors le résultat suivant[3] : soit $\theta > 0$, alors la suite $(n\theta)_{n\geq 1}$ est équirépartie modulo 1, si et seulement si, $\theta \notin \mathbb{Q}$.
On peut en déduire un résultat sur la distribution du premier chiffre de l'écriture en base 10 des puissances de 2. Plus précisément, on montre que le chiffre i $(1 \leq i \leq 9)$ apparaît d'autant plus souvent en première position dans l'écriture en base 10 des puissances de 2, qu'il est petit ! Cela se montre par l'intermédiaire du théorème de Bohl-Sierpinski-Weyl qui est une conséquence immédiate de ce dernier résultat.[4]

2. exo 1.27p45, Oraux X-ENS Analyse 2
3. exo 1.29p50, Oraux X-ENS Analyse 2
4. exo 1.15, Oraux X-ENS Algèbre 1