Développement: décomposition de Dunford

Adrien Fontaine

10 octobre 2013

Proposition 1

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $F \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme annulateur de f. Soit $F = \beta M_1^{\alpha_1}...M_s^{\alpha_s}$ la décomposition en facteurs irréductibles de $\mathbb{K}[X]$ du polynôme F. Pour tout i, on note $N_i = Ker(M_i^{\alpha_i}(f))$. On a alors $E = N_1 \oplus ... \oplus N_s$ et pour tout i, la projection sur N_i parallèlement à $\bigoplus_{j\neq i} N_j$ est un polynôme en f.

Démonstration : D'après le théorème de décomposition des noyaux,

$$E = N_1 \oplus ... \oplus N_s$$

Pour tout i, on note $Q_i = \prod_{j\neq i} M_j^{\alpha_j}$.
Aucun facteur n'est commun à tous les Q_i, donc ils sont premiers entre eux dans leur ensemble.
On applique alors Bézout :

$$\exists U_1, ..., U_s \in \mathbb{K}[X] / U_1Q_1 + ... + U_sQ_s = 1$$

D'où,

$$Id(f) = U_1(f) \circ Q_1(f) + ... + U_s(f) \circ Q_s(f)$$

Pour tout i on note $P_i = U_iQ_i$ et $p_i = P_i(f)$. On a

$$Id = \sum_{i=1}^{s} p_i \tag{1}$$

De plus, $\forall j \neq i, F \mid Q_iQ_j$.
Donc, $\forall j \neq i, p_i \circ p_j = Q_iQ_j(f) \circ U_iU_j(f) = 0$ Donc,

$$\begin{aligned} p_i &= \sum_{j=1}^{s} p_i \circ p_j \text{d'après \textbf{??}} \\ &= p_i^2 \end{aligned}$$

Les p_i sont donc des projecteurs. Montrons maintenant que $\forall i, Im(p_i) = N_i$.
Soit $y = p_i(x) \in Im(p_i)$. On a

$$\begin{aligned} M_i^{\alpha_i}(f)(y) &= M_i^{\alpha_i}(f) \circ P_i(f)(x) \\ &= U - i(f) \circ F(f)(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

donc, $Im(p_i) \subset Ker(M_i^{\alpha_i}(f)$.
Soit $x \in N_i$. D'après **??**, $x = p_1(x) + ... + p_s(x)$. Or, $\forall j \neq i, p_j(x) = U_j(f) \circ Q_j(f)(x) = 0$ car $M_i^{\alpha_i} \mid Q_j$, donc $x = p_i(x) \in Im(p_i)$. Donc, $Im(p_i) = N_i$.

Il ne reste plus qu'à prouver que $Ker(p_i) = \bigoplus_{j\neq i} N_j$.
$\forall j \neq i$, on a $N_j \subset Ker(p_i)$ car si $x \in N_j$ alors $p_i(x) = U_i(f) \circ Q_i(f)(x) = 0$ car $M_j^{\alpha_j} \mid Q_i$, donc $\bigoplus_{j\neq i} N_j \subset Ker(p_i)$.
Soit maintenant $x \in Ker(p_i)$. D'après **??**, $x = \sum_{j\neq i} p_j(x)$ donc $x \in \bigoplus_{j\neq i} N_j$. Finalement, $Ker(p_i) = \bigoplus_{j\neq i} N_j$. Ce qui conclut la démonstration. ■

Théorème 1 (*Décomposition de Dunford*)

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que P_f est scindé sur $\mathbb{K}$. Alors, il existe un unique couple $(d, n) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que :

1. *d est diagonalisable*
2. *n est nilpotent*
3. *$f = d + n$*
4. *$n \circ d = d \circ n$*

De plus, d et n sont des polynômes en f.

Démonstration : EXISTENCE
On écrit $P_f = (-1)^n \prod_{i=1}^{s} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ et $N_i = Ker(f - \lambda_i)^{\alpha_i}$. On reprend les notations de la proposition précédente.
On pose $d = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i p_i$ (ainsi construit d est diagonalisable).
Et $n = f - d = \sum_{i=1}^{s} (f - \lambda_i Id) p_i$. Comme p_i est un polynôme en f, il commute avec $(f - \lambda_i Id)^k$ pour tout k, et comme $p_i \circ p_j = \delta_{i,j}$, on a $n^k = \sum_{i=1}^{s} (f - \lambda_i Id)^k p_i$.
Pour $q = \sup_{1\leq i\leq s} \alpha_i$, on a donc $n^q = 0$, donc n est nilpotente.
Et n et d commutent puisque ce sont des polynômes en f.
UNICITÉ
Soit (d', n') un autre couple vérifiant les conditions de la décomposition de Dunford. On a $f \circ d' = d' \circ f$, donc pour tout i, N_i est stable par d' (on fait le calcul et on vérifie bien que ça marche).Comme $d_{|N_i} = \lambda_i Id_{N_i}$, on en déduit que $d \circ d' = d' \circ d$ sur N_i. Ceci étant vrai pour tout i, comme $E = \bigoplus_{i=1}^{s} N_i$, on en déduit que d et d' commutent. De plus, d et d' sont diagonalisables, on peut donc les diagonaliser dans une même base, ce qui prouve que $d' - d$ est diagonalisable. Comme $n = f - d$ et $n' = f - d'$ et que d et d' commutent, on a n et n' qui commutent également. Si on choisit p et q tels que $n^p = n'^q = 0$, on a donc en appliquand la formule du binôme de Newton, $(n - n')^{p+q} = 0$. Donc, $n - n' = d - d'$ est nilpotent. Or, $d' - d$ est diagonalisable, donc $d' - d = 0$. D'où $d = d'$ et $n = n'$. ■

Application : calcul de l'exponentielle de f L'écriture $f = d + n$ donnée par la décomposition de Dunford est intéressante car d et n commutant, on peut utiliser la formule du binôme de Newton pour calculer f^p :

$$f^p = (d + n)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{k}{p} d^k \circ n^{p-k}$$

Dans l'expression ci-dessus, on peut retirer les termes de la somme pour lesquels $p - k$ est plus grand que l'indice de nilpotence de n.
Un autre intérêt est le calcul de l'exponentielle. En effet, d et n commutant, on a $exp(f) = exp(d)exp(n)$. Le calcul de $exp(d)$ est simple si une base B de diagonalisation de d est connue :

$$\text{si } [d]_B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{bmatrix}, \ [exp(d)]_B = exp([d]_B) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & e^{\lambda_n} \end{bmatrix}$$

Quant à $exp(n)$, il suffit d'écrire que $exp(n) = \sum_{p=0}^{q-1} \frac{n^p}{p!}$ où q est l'indice de nilpotence de n. Dans la pratique, on calcule d et n grâce à la méthode exposée dans la démonstration de la décomposition de Dunford (utilisation des polynômes de Bézout). On peut alors calculer $exp(f)$ sans diagonaliser d à partir des projecteurs p_i. En effet, en reprenant les notations de la preuve précédente, les relations sur les p_i entraînent que pour tout p, $d^p = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i^p p_i$ donc

$$exp(d) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{d^p}{p!} = \sum_{p=0}^{+\infty}[\sum_{i=}^{s} \frac{\lambda_i^p}{p!} p_i] = \sum_{i=1}^{s}[\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\lambda_i^p}{p!}]p_i = \sum_{i=1}^{s} e^{\lambda_i} p_i$$

Par ailleurs,

$$exp(n) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{n^p}{p!} = \sum_{p=0}^{+\infty}[\sum_{i=1}^{s} \frac{(f-\lambda_i Id)^p}{p!}] = \sum_{i=}^{s}[\sum_{p=0}^{r_i-1} \frac{(f-\lambda_i Id)^p}{p!}]p_i$$

Finalement, on en déduit

$$exp(f) = exp(d)exp(n) = \sum_{i=1}^{s} e^{\lambda_i}[\sum_{p=0}^{r_i-1} \frac{(f-\lambda_i Id)^p}{p!}]p_i$$