Développement: Densité des polynômes orthogonaux

Adrien Fontaine

8 octobre 2013

Référence : Objectif Agrégation, p110-111 pour l'énoncé et p140 pour la démo

1 Définitions et notations

Fixons I un intervalle de $\mathbb{R}$.

- Soit $\rho : I \to \mathbb{R}$ mesurable et strictement positive. ρ est une fonction poids, si et seulement si,
$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_I |x^n|\rho(x)dx < +\infty$$
- On définit alors l'ensemble des fonctions de carré intégrable sur I pour la mesure ρ, noté $L^2(I,\rho)$. $L^2(I,\rho)$ est muni du produit scalaire $< .,. >$:
$$< f, g >= \int_I f(x)\overline{g(x)}\rho(x)dx$$
Muni de ce produit scalaire, $L^2(I,\rho)$ est un espace de Hilbert (la complétude étant assurée par le théorème de Riesz-Fischer).
- Par définition de ρ, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X^n : x \mapsto x^n$ est dans $L^2(I,\rho)$. Par le procédé de Gram-Schmidt, on orthonormalise $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ en une famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes orthonormés, de degré $deg(P_n) = n$.

2 Le théorème

Théorème 1

Si ρ est à "décroissance exponentielle" au sens où
$$\exists a > 0 / \int_I e^{ax}\rho(x)dx < +\infty$$
alors les polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une base hilbertienne de $L^2(I,\rho)$.

Démonstration : 1. **Définition de l'objectif**

$(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthonormée. Par conséquent, il nous reste simplement à montrer qu'elle est totale, *i.e* que
$$\overline{Vect((P_n)_{n\in\mathbb{N}})} = L^2(I,\rho)$$
Par construction de $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a
$$Vect((P_n)_{n\in\mathbb{N}}) = Vect((X^n)_{n\in\mathbb{N}})$$

Par conséquent, il nous suffit de montrer que

$$Vect((X^n)_{n\in\mathbb{N}})^\perp = \{0\}$$

(caractérisation classique de la densité dans un espace préhilbertien). On considère donc $f \in L^2(I,\rho)$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, < f, X^n <= 0$$

et on cherche à montrer que $f = 0$ dans $L^2(I,\rho)$.

2. **On construit la transformée de Fourier de $f\rho$**
Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = \begin{cases} f(x)\rho(x) & \text{si } x \in I \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour tout $t \geq 0$, on a

$$t \leq \frac{1+t^2}{2}$$

Donc, pour tout $x \in I$,

$$|\varphi(x)| = |f(x)|\rho(x) \leq \frac{1}{2}(1 + |f(x)|^2)\rho(x)$$

Or, $f \in L^2(I,\rho)$ et $X^0 \in L^2(I,\rho)$ donc $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$. On peut donc considérer sa transformée de Fourier :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \hat{\varphi}(\xi) = \int_I f(x)e^{-i\xi x}\rho(x)dx$$

3. **On étend $\hat{\varphi}$ en une fonction holomorphe sur** $B_a = \{z \in \mathbb{C}, |Im(z)| < \frac{a}{2}\}$
Faire un dessin de B_a.
Posons pour $z \in B_a$ et $x \in I$,

$$g(z,x) = f(x)e^{-izx}\rho(x)$$

On a :

$$\begin{aligned} \forall z \in B_a, \int_I |g(z,x)|dx &= \int_I |f(x)|e^{Im(z)x}\rho(x)dx \\ &\leq \int_I -f(x)|\sqrt{\rho}(x)e^{\frac{a}{2}x}\sqrt{\rho(x)}dx \\ &\leq \left(\int_I |f(x)|^2\rho(x)dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_I e^{a|x|}\rho(x)dx\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

La dernière inégalité étant obtenue par application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
$g(z,.)$ est donc intégrable sur I et on peut considérer

$$\forall z \in B_a, F(z) = \int_I g(z,x)dx$$

Montrons, à l'aide du théorème d'holomorphie sous le signe intégrale, que F est holomorphe.
- $\forall z \in B_a, x \mapsto g(z,x)$ est mesurable.
- $\forall x \in I, z \mapsto g(z,x)$ est holomorphe sur B_a.
- $\forall z \in B_a, \forall x \in I$

$$|g(z,x)| \leq \underbrace{|f(x)|\rho(x)e^{\frac{a}{2}|x|}}_{\text{indépendant de z et intégrable sur I}}$$

Donc, par le théorème d'holomorphie sous le signe intégrale, F est holomorphe sur B_a.

4. **F est identiquement nulle**
   Ce dernier théorème nous dit également que

$$\begin{aligned}\forall z \in B_a, \forall n \in \mathbb{N} F^{(n)}(z) &= \int_I \frac{\partial^n g(z,x)}{\partial z^n} dx \\ &= \int_I (-i)^n x^n f(x) e^{-izx} \rho(x) dx\end{aligned}$$

   En particulier,

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}, F^{(n)}(0) &= (-i)^n \int_I x^n f(x) \rho(x) dx \\ &= (-i)^n < f, X^n > \\ &= 0 \text{ par hypothèse sur } f\end{aligned}$$

   Or, F est holomorphe donc développable en série entière au voisinage de chacun de ses points, donc en particulier au voisinage de 0 :

$$\exists V \text{ voisinage de } 0 \text{ tel que } \forall z \in V, F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{F^{(n)}(0)}{n!} z^n = 0$$

   F est donc nulle sur un ensemble ayant un point d'accumulation, donc par le théorème des zéros isolés, B_a étant connexe, on a

$$\forall z \in B_a, F(z) = 0$$

   En particulier,

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \hat{\varphi}(\xi) = F(\xi) = 0$$

5. **Conclusion :**
   On a $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ et $\hat{\varphi} = 0$. Donc, par injectivité de la transformée de Fourier, on a $\varphi = 0$. Ainsi, $\forall x \in I, f(x)\rho(x) = 0$. D'où, $f = 0$ dans $L^2(I, \rho)$. ■

3 Exemples et contre-exemples

Exemple 1

- *$I = \mathbb{R}$ et $\rho(x) = e^{-x^2}$. Les polynômes P_n sont*

$$\forall n \in \mathbb{N}, P_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$$

  Il s'agit des polynômes de Hermite.
- *$I = [-1, 1]$ et $\rho(x) = 1$.*

$$\forall n \in \mathbb{N}, P_n = \frac{\sqrt{2n+1}}{\sqrt{2} 2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}((x^2-1)^n)$$

Contre-exemple 1

$I =]0, +\infty[$ et $\rho(x) = e^{-\ln(x)^2}$.
Soit $f(x) = \sin(2\pi \ln(x))$. Alors $f \neq 0$ et pourtant

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}, < f, X^n > &= \int_0^{+\infty} \sin(2\pi \ln(x)) x^n e^{-\ln(x)^2} dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(2\pi u) e^{nu} e^{-u^2} e^u du \; u = \ln(x) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(2\pi u) e^{-(u-\frac{n+1}{2})^2} e^{\frac{(n+1)^2}{4}} du \\
&= e^{\frac{(n+1)^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(2\pi t + \pi(n+1)) e^{-t^2} dt \\
&= (-1)^{n+1} e^{\frac{(n+1)^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\sin(2\pi t) e^{-t^2}}_{\textit{impaire}} dt \\
&= 0
\end{aligned}$$