Développement: Ellipsoïde de John Loewner

Adrien Fontaine

11 novembre 2012

Référence : Oraux X-ENS, Algèbre 3 p229-231 et exercice 3.31p222

Théorème 1 (*Ellipsoïde de John Loewner*)

Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$ d'intérieur non vide. Alors il existe un unique ellipsoïde centré en 0 de volume minimal contenant K.

Démonstration : On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne usuelle.

Un ellipsoïde plein centré en 0 de $\mathbb{R}^n$ a une équation du type $q(x) \leq 1$, où q est une forme quadratique définie positive.

On notera Q (resp. Q_+, resp. Q_{++}) l'ensemble des formes quadratiques (resp. positives, resp. définies positives) de $\mathbb{R}^n$ et pour $q \in Q_{++}$, on pose $\varepsilon_q = \{x \in \mathbb{R}^n, q(x) \leq 1\}$.

Commençons par calculer le volume V_q de ε_q. Il existe une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ dans laquelle q s'écrit $q(x) = \sum_{i=1}^n a_i x_i^2$. On obtient

$$V_q = \int\int ... \int_{a_1x_1^2+...+a_nx_n^2} dx_1...dx_n$$

On considère le changement de variable $x_i = t_i/\sqrt{a_i}$ (c'est bien un C^1-difféomorphisme) dont le jacobien est

$$\frac{1}{\sqrt{a_1...a_n}}$$

On observe que si S est la matrice de q dans une base orthonormale quelconque de $\mathbb{R}^n$, il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $S = PDiag(a_1, ..., a_n)^tP$. On a donc $det(S) = a_1...a_n$. Ce déterminant ne dépend donc pas de la base de $\mathbb{R}^n$ choisie. Notons le $D(q)$. Le changement de variable dans l'intégrale multiple donne :

$$V_q = \int\int ... \int_{x_1^2+...+x_n^2 \leq 1} \frac{dx_1...dx_n}{\sqrt{D(q)}} = \frac{V_o}{\sqrt{(D(q))}}$$

où V_0 est le volume de la boule unité pour la norme euclidienne canonique.

Le problème peut donc se reformuler ainsi : il s'agit de montrer que si K est un compact d'intérieur non vide de $\mathbb{R}^n$, il existe une unique forme quadratique $q \in Q_{++}$, telle que $D(q)$ soit maximal et que pour tout $x \in K$, $q(x) \leq 1$. On munit l'espace Q de la norme N définie par $N(q) = \sup_{\|x\|\leq 1} \mid q(x) \mid$.

Il est alors naturel de considérer l'ensemble

$$\mathcal{A} = \{q \in Q_+, \forall x \in K, q(x) \leq 1\}$$

puis de chercher à maximiser q sur ce domaine.

Montrons que $\mathcal{A}$ est un convexe compact non vide de Q.

- $\mathcal{A}$ est convexe : soient $q, q' \in \mathcal{A}$, $\lambda \in [0,1]$
$$\forall x \in \mathbb{R}^n, (\lambda q + (1-\lambda)q')(x) = \lambda q(x) + (1-\lambda)q'(x) \geq 0$$
donc, $\lambda q + (1-\lambda)q' \in Q_+$.
De plus, si $x \in K$,
$$\begin{aligned}(\lambda q + (1-\lambda)q')(x) &\leq \lambda q(x) + (1-\lambda)q'(x)\\ &\leq \lambda + 1 - \lambda = 1\end{aligned}$$
donc, $\lambda q + (1-\lambda)q' \in \mathcal{A}$
- $\mathcal{A}$ est fermé : si $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $\mathcal{A}$ convergente dans Q vers q, on a pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,
$$\mid q(x) - q_n(x) \mid \leq N(q - q_n)\|x\|$$
donc, $\lim_{n\to\infty} q_n(x) = q(x)$, donc, $q(x) = \lim_{n\to\infty} q_n(x) \geq 0$, et $\forall x \in K, q(x) = \lim q_n(x) \leq 1$, donc $q \in \mathcal{A}$.
- $\mathcal{A}$ est borné : comme K est d'intérieur non vide, il existe $a \in K$ et $r > 0$ tel que $B(a,r) \subset K$. Soit $q \in \mathcal{A}$. Si $\|x\| \leq r$, alors $x + a \in K$ donc $q(x+a) \leq 1$. D'autre part, $q(a) = q(-a) \leq 1$. Par l'inégalité de Minkowski, on obtient
$$\sqrt{q(x)} \leq \sqrt{q(x+a)} + \sqrt{q(-a)} \leq 2$$
donc, $q(x) \leq 4$.
Si $\|x\| \leq 1$, $\mid q(x) \mid = q(x) = \frac{1}{r^2}q(rx) \leq \frac{4}{r^2}$, d'où $N(q) \leq \frac{4}{r^2}$.
L'ensemble des formes quadratiques correspond à l'ensemble des formes bilinéaires symétriques, qui correspond lui même à l'ensemble des matrices symétriques réelles, donc on est dans un espace de dimension finie. Donc, $\mathcal{A}$ est compact.
- $\mathcal{A}$ est non vide : puisque K est compact, il est borné. Soit $M > 0$ tel que $\forall x \in K$, $\|x\| \leq M$. Alors si q est définie par $q(x) = \frac{\|x\|^2}{M^2}$, on a pour tout $x \in K$, $q(x) \leq 1$.

Bilan : $\mathcal{A}$ est un convexe compact non vide de Q.
L'application déterminant est continue donc $q \mapsto D(q)$ est continue sur le compact $\mathcal{A}$. Elle atteint donc son maximum sur $\mathcal{A}$ en q_0. Comme $\mathcal{A}$ contient $x \mapsto \frac{\|x\|^2}{M^2}$ qui est définie positive, on a $D(q_0) > 0$ donc $q_0 \in Q_{++}$.
Nous venons de prouver qu'il existe un ellipsoïde ε_{q_0} de volume minimal qui contient K.
Unicité : il faut prouver que q_0 est unique. On suppose qu'il existe $q \in \mathcal{A}$, $q \neq q_0$ tel que $D(q) = D(q_0)$. Soient S et S_0 les matrices de q et q_0 dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Comme $\mathcal{A}$ est convexe, $1/2(q+q_0) \in \mathcal{A}$ et [1], on a :
$$\begin{aligned}D(\frac{1}{2}(q+q_0)) = det(\frac{1}{2}(S+S_0)) &> (det(S))^{1/2}(det(S_0))^{1/2}\\ &\geq det(S_0)\\ &\geq D(q_0)\end{aligned}$$
Absurde. D'où l'unicité. ■

Détail supplémentaire : concavité logarithmique du déterminant

Proposition 1

L'application
$$\begin{array}{cccc}\Phi & : & S_n^{++}(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R}\\ & & A & \mapsto & det(A)\end{array}$$

1. exercice 3.31p222, convexité logarithmique du déterminant sur l'ensemble des matrices symétriques définies positives

est logarithmiquement concave, c'est à dire que $\ln \circ \Phi$ *est concave. En d'autres termes,*

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+ / \alpha + \beta = 1, \forall A, B \in S_n^{++}(\mathbb{R}),\ det(\alpha A + \beta B) \geq det(A)^\alpha det(B)^\beta$$

Démonstration : Par le théorème de pseudo-réduction simultanée des formes quadratiques, on sait qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et $D = Diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ tels que $A = {}^tPP$ et $B = {}^tPDP$. Comme B est définie positive, on a de plus que les λ_i sont strictement positifs. De plus,

$$\begin{cases} det(A)^\alpha det(B)^\beta & = (det(P)^2)^\alpha (det(P)^2 det(D))^\beta = det(P)^2 det(D)^\beta \\ det(\alpha A + \beta B) & = det(P)^2 det(\alpha I_n \beta D) \end{cases} \tag{1}$$

Le logarithme étant concave, on a également :

$$\forall i \in \{1, ..., n\}, \ln(\alpha + \beta\lambda_i) \geq \alpha \ln(1) + \beta \ln(\lambda_i) = \beta \ln(\lambda_i)$$

En sommant ces inégalités pour i allant de 1 à n, on obtient :

$$\sum_{i=1}^n \ln(\alpha + \beta\lambda_i) \geq \beta \sum_{i=1}^n \ln(\lambda_i)$$

soit

$$\ln(\prod_{i=1}^n (\alpha + \beta\lambda_i)) \geq \ln((\prod_{i=1}^n \lambda_i)^\beta)$$

D'où en appliquant l'exponentielle (croissante),

$$\prod_{i=1}^n (\alpha + \beta\lambda_i) \geq (\prod_{i=1}^n \lambda_i)^\beta$$

D'où le résultat d'après 1. ■

Application de l'ellipsoïde de John-Loewner :

En fait, il y a deux ellipsoïdes de John et Loewner, la première celle dont on vient de démontrer l'existence et la deuxième qui est l'unique ellipsoïde de volume maximal contenu dans un convexe compact. Elles permettent d'approximer les convexes compacts de $\mathbb{R}^n$.

Par ailleurs, une application assez inattendue de l'ellipsoïde de John-Loewner est de retrouver un résultat classique de la théorie des groupes et de la géométrie [2]

Proposition 2

Tout sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$ *est conjugué à un sous-groupe du groupe orthogonal.*

2. pour plus de détails, on pourra consulter sur la page de Jean-Baptiste Campesato, http ://citron.9grid.fr/ , un article très bien écrit et complet sur les ellipsoïdes de John-Loewner