Développement: Équation de Schrodinger

18 février 2013

Référence : Claude Zuily, Éléments de distributions et d'équations aux dérivées partielles, Cours et problème résolus

Théorème 1

Soit $g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Il existe un unique $u = (u_t) \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n))$ telle que

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - i\Delta u = 0 \textit{ dans } \mathcal{S}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) \\ u_0 = g \end{cases}$$

Démonstration : 1. *Existence :* pour $t \in \mathbb{R}$, posons

$$u_t = \bar{\mathcal{F}}(e^{-it|\xi|^2}\hat{g})$$

u_t est bien définie car $\hat{g} \in \mathcal{S}'$, donc $e^{-it|\xi|^2}\hat{g} \in \mathcal{S}'$ et donc $u_t \in \mathcal{S}'$. Par ailleurs, on a $u_0 = g$ et pour $\varphi \in \mathcal{S}$, on a $< u_t, \varphi >=< \hat{g}, e^{-it|.|^2}\bar{\mathcal{F}}(\varphi) >$ de sorte que $(u_t) \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{S}')$ d'après la proposition 42 du plan. Comme $< \hat{u_t}, \varphi >=< u_t, \hat{\varphi} >$, on a aussi $\hat{u_t} \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{S}')$. Par ailleurs, u est définie par

$$\forall \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n), < u, \psi >= \int_{\mathbb{R}} < u_t, \psi(t, .) > dt$$

Alors pour $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned} < \frac{\partial u}{\partial t} - i\Delta u, \psi > &= - < u, \frac{\partial \psi}{\partial t} + i\Delta\psi > \\ &= - \int_{\mathbb{R}} < u_t, \frac{\partial \psi}{\partial t} + i\Delta\psi > dt \\ &= - \int_{\mathbb{R}} < \hat{u_t}, \bar{\mathcal{F}}\left(\frac{\partial \psi}{\partial t} + i\Delta\psi\right) > dt \\ &= - \int_{\mathbb{R}} < e^{-it|.|^2}\hat{g}, \left(\frac{\partial}{\partial t} - i|.|^2\right)\bar{\mathcal{F}}(\psi(t, .) > dt \end{aligned}$$

On remarque par ailleurs que

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-it|\xi|^2}\bar{\mathcal{F}}(\psi(t, .))(\xi)\right) = \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} - i|\xi|^2\right)\bar{\mathcal{F}}(\psi(t, .))(\xi)\right]e^{-it|\xi|^2}$$

On en déduit,

$$\begin{aligned} < \frac{\partial u}{\partial t} - i\Delta u, \psi > &= \int_{\mathbb{R}} < \hat{g}, \frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-it|.|^2}\bar{\mathcal{F}}\psi(t, .)\right) > dt \\ &= - \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial t} < \hat{g}, e^{-it|.|^2}\bar{\mathcal{F}}\psi(t, .) > dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

2. *Unicité :* On commence par remarquer que la différence de deux solutions est un élément $u \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{S}')$ qui vérifie l'équation de Schrodinger avec la condition initiale $u_0 = 0$. Nous allons montrer que $u \equiv 0$. Pour tout $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$, on a

$$0 =< \partial_t u - i\Delta u, \psi >= - < u, (\partial_t + i\Delta)\psi >= - \int_{\mathbb{R}} < u_t, (\partial + i\Delta)\psi(t,.) > dt$$

Par ailleurs, d'après la proposition 43 du plan, on peut écrire

$$\frac{d}{dt} < u_t, \psi(t,.) >=< u_t^{(1)}, \psi(t,.) > + < u_t, \partial_t \psi(t,.) >$$

Il en résulte que

$$0 = - \int_{\mathbb{R}} \frac{d}{dt} < u_t, \psi(t,.) > dt + \int_{\mathbb{R}} \left[<_u t^{(1)}, \psi(t,.) > -i < u_t, \Delta\psi(t,.) > \right] dt$$

Or, $\psi(x) \to 0$ quand $x \to \pm\infty$, d'où

$$\forall \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n), \int_{\mathbb{R}} \left[< u_t^{(1)}, \psi(t,.) > -i < u_t, \Delta\psi(t,.) > \right] dt = 0$$

Par ailleurs, on a $\mathcal{F}(u_t^{(1)}) = \hat{u_t}^{(1)}$. En effet, pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on a

$$< \mathcal{F}(u_t^{(1)}), \varphi >=< u_t^{(1)}, \hat{\varphi} >= \frac{d}{dt} < u_t, \hat{\varphi} >= \frac{d}{dt} < \hat{u}_t, \varphi >=< \hat{u_t}^{(1)}, \varphi >$$

Donc,

$$\int_{\mathbb{R}} \left[< \hat{u_t}^{(1)}, \bar{\mathcal{F}}\psi(t,.) > +i < \hat{u}_t, |.|^2 \bar{\mathcal{F}}\psi(t,.) > \right] dt = 0$$

Ceci est vrai, en particulier, pour ψ telle que $\bar{\mathcal{F}}\psi(t,\xi) = e^{it|\xi|^2}\varphi(\xi)\chi(t)$ (existence d'un tel ψ par la prop 25 du plan), où $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\chi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ sont quelconques. On en déduit que,

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \forall \chi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \int_{\mathbb{R}} \left[< \hat{u_t}^{(1)}, e^{it|.|^2}\varphi > +i < \hat{u}_t, |.|^2 e^{it|.|^2}\varphi > \right] \chi(t) dt = 0$$

La fonction entre crochets étant une fonction continue de t sur $\mathbb{R}$, il en résulte que

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \forall t \in \mathbb{R}, < \hat{u_t}^{(1)}, e^{it|.|^2}\varphi > +i < \hat{u}_t, |.|^2 e^{it|.|^2}\varphi >= 0$$

Or,

$$< \hat{u_t}^{(1)}, e^{it|.|^2}\varphi > +i < \hat{u}_t, |.|^2 e^{it|.|^2}\varphi >= \frac{d}{dt} < \hat{u}_t, e^{it|.|^2}\varphi >$$

Donc, pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $t \mapsto < e^{it|.|^2}\varphi >$ est constante. Donc, $< \hat{u}_t, e^{it|.|^2}\varphi >=< \hat{u}_0, \varphi >= 0$ car $u_0 = 0$. Soient $t_0 \in \mathbb{R}$ et $\theta \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ quelconques. La fonction $\varphi(\xi) = e^{-it_0|\xi|^2}\theta(\xi)$ est dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et donc, $< \hat{u_{t_0}}, e^{it_0|.|^2}\varphi >=< \hat{u_{t_0}}, \theta >= 0$. Donc $\hat{u_{t_0}} = 0$ dans $\mathcal{S}'$, d'où $\forall t \in \mathbb{R}, u_t = 0$, ce qui prouve que $u = 0$. ■