Développement: Résolution de l'équation de la chaleur par les séries de Fourier

Adrien Fontaine

1er juin 2013

Référence : Oraux X-ENS, Analyse 4

Théorème 1

Soit $u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, C^1 par morceaux et 2π périodique. Alors, il existe une unique fonction $u : (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, C^∞ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, et 2π périodique par rapport à x, telle que

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} & = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0,x) & = u_0(x), \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

De plus,

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, u(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} C_n e^{-nt^2} e^{inx}$$

où les C_n sont les coefficients de Fourier de u_0.

Démonstration : Analyse : Soit u une solution du problème posé. Comme à $t > 0$ fixé, $u_t : x \mapsto u(t,x)$ est 2π-périodique et de classe C^∞, elle est somme de sa série de Fourier, si bien que l'on peut écrire :

$$u(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(t) e^{inx} \text{ avec } c_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(t,x) e^{-inx} dx$$

De la même manière, la fonction $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ est somme de sa série de Fourier et celle-ci est obtenue en dérivant formellement la série u_t deux fois par rapport à x :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = -\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2 c_n(t) e^{inx}$$

Montrons que $\frac{\partial u}{\partial t}$ s'obtient par dérivation formelle par rapport à t de l'expression $u(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(t) e^{inx}$.
Comme pour u, on peut écrire

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widetilde{c_n(t)} e^{inx} \text{ avec } \widetilde{c_n(t)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) e^{-inx} dx$$

La fonction u étant de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, on en déduit que l'intégrale sur le segment $[0, 2\pi]$, $\int_0^{2\pi} u(t,x) e^{-inx} dx$ est une fonction de classe C^1 par rapport à la variable t, et $\widetilde{c_n(t)} = c_n'(t)$, si bien que

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n'(t) e^{inx}$$

Ainsi, l'équation vérifiée par u, donne

$$0=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(c_n'(t)+n^2c_n(t)\right)e^{inx} \text{ pour tout } t>0, x\in\mathbb{R}$$

Or, à $t>0$ fixé, cette série est normalement convergente en x sur $\mathbb{R}$ (car la série de Fourier d'une fonction de classe C^∞ converge normalement). Cela justifie l'interversion suivante :

$$\begin{aligned}0&=\int_0^{2\pi}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(c_n'(t)+n^2c_n(t)\right)e^{inx}\right)e^{-in_0x}dx\\&=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(c_n'(t)+n^2c_n(t)\right)\int_0^{2\pi}e^{i(n-n_0)x}dx\\&=2\pi\left(c_{n_0}'(t)+n_0^2c_{n_0}(t)\right),\text{ où } n_0\in\mathbb{Z}\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{Z}$ et $t>0$, $c_n'(t)+n^2c_n(t)=0$.
Donc, il existe $\alpha_n\in\mathbb{C}$ tel que $c_n(t)=\alpha_ne^{-n^2t}$.
Il reste à déterminer α_n. Considérons pour cela la série de Fourier de u_0 notée $\sum_{n\in\mathbb{Z}}C_ne^{inx}$. Si on applique le théorème de Parseval à u_0-u_t, on obtient

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}|C_n-c_n(t)|^2=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|u_0(x)-u_t(x)|^2dx$$

A n fixé, on a donc

$$|C_n-c_n(t)|^2\leq\frac{1}{2\pi}|u_0(x)-u_t(x)|^2dx$$

Or, cette intégrale tend vers 0 quand $t\to 0$, par application du théorème de convergence dominée. En effet,

$$(t,x)\in[0,1]\times[0,2\pi]\mapsto|u_0(x)-u_t(x)|^2=|u(0,x)-u(t,x)|^2$$

est bornée sur le compact $[0,1]\times[0,2\pi]$ par continuité de u et les fonctions constantes sont intégrables sur $[0,2\pi]$. Enfin, pour tout $x\in[0,2\pi]$, $|u(0,x)-u(t,x)|\to 0$ quand $t\to 0$, par continuité de u sur $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}$.
On en déduit par passage à la limite que $|C_n-\alpha_n|^2=0$ et donc $\alpha_n=C_n$.
Ainsi, si u est solution de l'équation, pour tout $(t,x)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}$, on a

$$u(t,x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}C_ne^{-n^2t}e^{inx}$$

où les C_n sont les coefficients de Fourier de u_0.
Synthèse : Montrons que

$$u:(t,x)\mapsto u(t,x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}C_ne^{-n^2t}e^{inx}$$

convient. Tout d'abord cette série est normalement convergente car

$$\forall t\geq 0,\forall x\in\mathbb{R},|C_ne^{-n^2t}e^{inx}|\leq|C_n|$$

et la série des $|C_n|$ converge puisque u_0 est continue, 2π-périodique et C^1 par morceaux.
On en déduit que u est bien définie et continue puisque chaque fonction $(t,x)\mapsto C_ne^{-n^2t}e^{inx}$ est continue.
Pour tout $t\geq 0$, $x\mapsto u(t,x)$ est 2π-périodique.
La dérivation formelle de la série définissant u donne pour $k,l\in\mathbb{N}$,

$$\frac{\partial^{k+l}u}{\partial t^k\partial x^l}(t,x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^ki^ln^{2k+l}C_ne^{-n^2t}e^{inx}$$

Or, comme les C_n sont bornés par
$$K = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |u_0|$$
Cette série est normalement convergente sur $]t_0, +\infty[\times\mathbb{R}$, $t_0 > 0$ puisque
$$|(-1)^k i^l n^{2k+l} C_n e^{-n^2 t} e^{inx}| \leq K n^{2k+l} e^{-n^2 t_0} = o(\frac{1}{n^2})$$
Nous savons alors que u admet des dérivées partielles par rapport à x et à t à tout ordre, si bien que u est C^∞ sur $]t_0, +\infty[\times\mathbb{R}$ pour tout $t_0 > 0$, et finalement sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ tout entier.
Enfin, comme les dérivées partielles s'obtiennent par dérivation formelle, u vérifie l'équation puisque
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} -n^2 C_n e^{-n^2 t} e^{inx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
et $u(0, x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} C_n e^{inx} = u_0(x)$.
La fonction u répond bien au problème posé et c'est la seule solution. ■

Montrons de plus que si u_0 non constante, alors il n'y a pas de solution bornée sur $\mathbb{R}^2$.
Si u solution bornée sur $\mathbb{R}^2$, alors
$$\forall (t, x) \in \mathbb{R}^2, u(t, x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} C_n e^{-n^2 t} e^{inx}$$
où les $C_n e^{-n^2 t}$ sont les coefficients de Fourier de $x \mapsto u(t, x)$. Or, à n et t fixés, on a :
$$\begin{aligned} |C_n e^{-n^2 t}| = |C_n| e^{-n^2 t} &= |\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(t, x) e^{-inx} dx \\ &\leq \|u\| \end{aligned}$$
Nécessairement, si $n \neq 0$, en faisant tendre t vers $-\infty$, il vient $C_n = 0$. On en déduit que u_0 est constante égale à C_0.