Développement: Un exemple d'étude de sous-variété Groupe de matrices

Adrien Fontaine

9 janvier 2013

Référence : Rouvière, exercice 94p284

Proposition 1

> 1. *Soit $G = SL_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de taille n réelles de déterminant 1. G est une sous-variété de $\mathbb{R}^{n^2}$, de dimension $n^2 - 1$ et si $X \in SL_n(\mathbb{R})$, alors l'espace tangent en X est l'ensemble des matrices H telles que*
>
> $$Tr(X^{-1}H) = 0$$
>
> 2. *Si $G = O_n(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices orthogonales de taille n, alors G est une sous-variété de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$. Son espace tangent en X est l'ensemble des H tels que*
>
> $$^t(X^{-1}H) = -X^{-1}H$$

Démonstration : Soit $E = \mathbb{R}^{n^2}$ l'ensemble des matrices de taille n.

1. Le groupe G est l'ensemble des $X \in E$ tels que $f(X) = 0$, en notant $f(X) = det(X) - 1$. C'est une fonction de classe C^1 (et même C^∞) sur E (elle est polynômiale en les coefficients de X). Calculons sa différentielle. On va d'abord calculer $Ddet(I)$. Pour cela, il suffit de calculer la dérivée de det en I dans une direction quelconque $H \in E$. Or, si $\lambda_1, ..., \lambda_n$ sont les valeurs propres de H, celles de $I + tH$ pour $t \in \mathbb{R}$ sont les $1 + t\lambda_i$, d'où,

$$\begin{aligned} det(I + tH) &= \prod_{i=1}^{n}(1 + t\lambda_i) \\ &= 1 + t\sum_{i=1}^{n}\lambda_i + O(t^2) \\ &= 1 + t\ Tr(H) + O(t^2) \end{aligned}$$

pour $t \to 0$ en ordonnant selon les puissances croissantes de t. Le coefficient de t donne

$$Ddet(I)H = Tr(H)$$

Si X est maintenant une matrice inversible, on se ramène facilement de X à I en écrivant

$$\begin{aligned} det(X + H) &= det(X).det(I + X^{-1}H) \\ &= det(X).(1 + Tr(X^{-1}H) + o(\|H\|)) \\ &= det(X) + Tr({}^t\tilde{X}H) + o(\|H\|) \end{aligned}$$

en notant $\tilde{X} = det(X)^t X^{-1}$ la comatrice de X. Par suite,

$$Ddet(X)H = Tr({}^t\tilde{X}H)$$

Enfin, les matrices inversibles forment un ouvert dense de E. Elles sont en effet caractérisées par $det(X) \neq 0$, donc forment un ouvert. Pour $Y \in E$ donnée, de valeurs propres (réelles ou complexes) $\lambda_1, ..., \lambda_n$, on peut choisir une suite ε_k convergeant vers 0 dans $\mathbb{R}$, telle que pour tout k,

$$det(Y - \varepsilon_k I) = \prod_{i=1}^{k} (\lambda_i - \varepsilon_k) \neq 0$$

Les matrices $X_k = Y_k - \varepsilon_k I$ sont alors inversibles et convergent vers Y dans E. D'où, la densité annoncée.
L'application $X \mapsto \tilde{X}$ est continue de E dans E, puisque les cofacteurs sont des fonctions polynômiales des coefficients de X. Comme det est de classe C^1, l'expression obtenue pour sa différentielle en un point inversible se prolonge par continuité à E tout entier.
Donc, pour $X \in G$ et $H \in E$, on a :

$$Df(X)H = Tr(X^{-1}H)$$

On a donc en particulier $Df(X)X = n$. Par suite, la forme linéaire $Df(X)$ est non nulle pour tout $X \in G$. Donc, d'après la caractérisation par submersion, G est une sous-variété de classe C^∞ et de dimension $n^2 - 1$. Par ailleurs, son espace tangent en X est donné par le noyau de $Df(X)$. C'est donc l'ensemble des matrices H telles que

$$Tr(X^{-1}H) = 0$$

2. On a maintenant G qui désigne l'ensemble des matrices $X \in E$ tels que $g(X) = 0$ où $g(X) = {}^tXX - I$, application C^1 (et même C^∞) de E dans l'espace S des matrices symétriques de taille n. Il nous faut maintenant vérifier que pour chaque $X \in G$, $Dg(X)$ est une surjection, c'est à dire une application de rang $dim(S)$. Or, pour chaque $X \in G$ et $H \in E$,

$$Dg(X)H = {}^tXH + {}^tHX = X^{-1}H + {}^t(X{-}1H)$$

Si Y est donnée dans S, l'équation $Dg(X)H = Y$ admet notamment la solution $H = \frac{1}{2}XY$, ce qui établit la surjectivité.
Par suite, G est une sous-variété de E de dimension,

$$dim(G) = dim(E) - dim(S) = n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

et son espace tangent en X est l'ensemble des H tels que

$${}^t(X^{-1}H) = -X^{-1}H$$

Pour $X = I$, c'est le sous-espace de E formé des matrices antisymétriques. ■