Développement: Formule sommatoire de Poisson et application

Adrien Fontaine

9 février 2013

Référence :
- Zuily-Queffelec, exemple IV.8p95
- Roger Godement, Analyse mathématique II, p350-353

Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, on définit sa transformée de Fourier par la formule

$$\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi xt} f(t)dt$$

La formule sommatoire de Poisson est une formule qui relie sous certaines hypothèses la somme des valeurs prises par f aux points entiers, à la somme des valeurs prises par $\hat{f}$ aux points entiers. De façon plus précise, on a l'énoncé suivant :

Théorème 1 (*Formule sommatoire de Poisson*)

Soit $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $M > 0$ et $\alpha > 1$ tels que $\forall x \in \mathbb{R}, \mid f(x) \mid \leq M(1+ \mid x \mid)^{-\alpha}$. On suppose également que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \mid \hat{f}(n) \mid < +\infty$. Alors :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)$$

Démonstration : Une idée pour construire des fonctions périodiques sur $\mathbb{R}$ à partir d'une fonction non périodique f, consiste à considérer la série

$$F(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n)$$

Alors F est bien définie et est continue sur $\mathbb{R}$. En effet, montrons que cette série converge normalement sur tout compact de $\mathbb{R}$.

Soit $A > 0$ et soit $x \in [-A, A]$. Alors, $\mid x+n \mid \geq n- \mid x \mid \geq n - A$. Pour tout $n \geq 2A$, on a donc $\mid x+n \mid \geq \frac{n}{2}$. Ainsi,

$$\mid f(x+n) \mid \leq \frac{1}{(1+\frac{n}{2})^\alpha}$$

majoration indépendante de x et dont la série converge puisque $\alpha > 1$.

On remarque par ailleurs que F est clairement 1-périodique. On peut alors calculer son n-ème coefficient de Fourier [1].

$$\hat{F}(n) = \int_0^1 F(x)e^{-2i\pi nx}dx = \int_0^1 \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(x+k)e^{-2i\pi nx}dx$$

1. Attention ! La fonction F est 1-périodique et non 2π-périodique, comme on en a l'habitude. Il faut donc adapter la formule pour les coefficient de Fourier

Or, la convergence de la série étant normale sur le compact $[0,1]$, on peut intervertir somme et intégrale :

$$\hat{F}(n) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_0^1 f(x+k)e^{-2i\pi nx}dx = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_k^{k+1} f(u)e^{-2i\pi nu}e^{2i\pi nk}du = \int_{\mathbb{R}} f(u)e^{-2i\pi nu}du = \hat{f}(n)$$

Enfin, comme $F \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$, et que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \mid \hat{F}(n) \mid = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mid \hat{f}(n) \mid < \infty$, la série de Fourier $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{F}(n)e^{2i\pi nx}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$, et F est égale à sa série de Fourier (par injectivité de Fourier). On a alors :

$$F(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{F}(n)e^{2i\pi nx} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)e^{2i\pi nx}$$

D'où le résultat en évaluant en $x = 0$. ■

Une application spectaculaire de la formule sommatoire de Poisson, repose sur le calcul de la transformée de Fourier de la fonction $f(x) = e^{-\pi x^2}$. Le calcul est classique et donne :

$$\hat{f}(\xi) = e^{-\pi\xi^2}$$

Par ailleurs, la fonction f est continue et intégrable sur $\mathbb{R}$, et décroit plus vite à l'infini que toute puissance négative de x (c'est un élément de l'espace de Schwartz). Donc f vérifie les hypothèses du théorème 1. En particulier, f vérifie l'identité

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)e^{2i\pi nx}$$

c'est à dire,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi(x+n)^2} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2}e^{2i\pi nx}$$

On peut généraliser en remplaçant la fonction $f(t) = e^{-\pi t^2}$ par

$$f(t,z) = e^{i\pi zt^2}$$

où $z = x + iy$ est un paramètre complexe. On a :

$$|f(t,z)| = e^{-\pi yt^2} = q^{t^2} \text{ où } q = e^{-\pi y}$$

Si on suppose $y > 0$, alors $q < 1$, de sorte que pour $z \in \Pi = \{z \in \mathbb{C}/Im(z) > 0\}$ donné, $|f(t,z)|$ tend vers 0 à l'infini plus rapidement que t^{-N} quel que soit $N > 0$. Les autres hypothèses du théorème 1 étant trivialement vérifiées, on obtient la formule

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(t+n,z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n,z)e^{2i\pi nt}$$

où la transformée de Fourier est effectuée par rapport à la variable t. Il reste donc à calculer la transformée de Fourier,

$$\hat{f}(u,z) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\pi zt^2}e^{-2i\pi ut}dt = \int_{\mathbb{R}} g(t,z)dt$$

Supposons d'abord $z = iy$. Alors, $izt^2 = -yt^2$. En effectuant le changement de variable $t \mapsto y^{-1/2}t$, on obtient

$$\hat{f}(u,iy) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi t^2}e^{-2i\pi uy^{-1/2}t}y^{1/2}dt$$

ce qui nous ramène à la transformée de Fourier de $e^{-\pi t^2}$ pour la valeur $uy^{-1/2}$. On a donc,

$$\hat{f}(u, iy) = y^{-1/2} e^{-\pi \frac{u^2}{y}} \tag{1}$$

Dans le cas général, une simple application du théorème d'holomorphie sous le signe intégral, nous assure l'holomorphie de $\hat{f}(u, z)$ sur Π. Puisqu'on sait calculer $\hat{f}(u, z)$ pour $z = iy$ imaginaire pur, on obtiendra le cas général en construisant dans Π, la seule et unique (d'après le principe de prolongement analytique) fonction holomorphe qui coïncide sur l'axe imaginaire, avec (1).
Or, on a

$$\hat{f}(u, z) = \frac{z}{i}^{-1/2} e^{-\pi i \frac{u^2}{z}}$$

pour z imaginaire pur (en convenant que $\frac{z}{i}^{-1/2}$ est réel *positif* pour $z = iy$, avec $y > 0$). Le facteur $e^{-\pi i \frac{u^2}{z}}$ étant holomorphe sur $\mathbb{C}^*$, tout revient donc à trouver une fonction holomorphe sur Π, qui pour $z = iy$ se réduise à $y^{-1/2}$. En s'inspirant de la construction du logarithme complexe, la fonction holomorphe que nous cherchons est donnée par,

$$(\frac{z}{i})^{-1/2} = |z|^{-1/2} e^{-1/2 arg(\frac{z}{i})}$$

avec $|arg(\frac{z}{i})| < \pi$, c'est à dire $arg(\frac{z}{i}) = arg(z) - \frac{\pi}{2}$ avec $0 < arg(z) < \pi$.
La formule sommatoire de Poisson nous donne alors :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{i\pi z(t+n)^2} = (\frac{z}{i})^{-1/2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-i\pi n^2/z + 2i\pi nt}$$

En introduisant la fonction

$$\Theta(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{i\pi n^2 z}, \ z \in \Pi$$

de Jacobi, et en évaluant la formule sommatoire de Poisson en $t = 0$, on obtient

$$\Theta(-1/Z) = (z/i)^{1/2} \Theta(z)$$

Lien avec l'équation de la chaleur
La fonction Θ introduite, n'est pas sans lien avec l'équation de la chaleur. En effet, la fonction

$$\theta(x, t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 t + 2i\pi nx}$$

vérifie l'équation

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = 4\pi^2 \frac{\partial \theta}{\partial t}$$

et est donc solution de l'équation de la chaleur, à un coefficient numérique > 0 près qui dépend des constantes physiques.
Remarques sur la détermination de l'argument
Dans un ensemble connexe, $G \subset \mathbb{C}^*$, deux branches uniformes de l'argument différent l'une de l'autre par un multiple constant de 2π.[2] Qu'en est-il de l'existence ? Existe-t-il une branche uniforme de l'argument pour tout ouvert connexe $G \subset \mathbb{C}^*$?
La réponse est négative si $G = \mathbb{C}^*$.[3]

---

2. voir Godement, Analyse I p417-418 (iii)
3. voir Godement, Analyse I, p418 (iv)

Cepenant, on peut montrer [4] qu'il est possible de trouver une branche uniforme de l'argument dans l'ouvert G obtenu en retranchant de $\mathbb{C}^*$ une demi droite quelconque d'origine 0.
Dans le cadre du problème qui nous intéresse ici, l'ouvert Π vérifie donc toutes les conditions nous garantissant l'existence d'une branche de l'argument. En imposant par ailleurs la condition $|arg(z)| < \pi$, notre branche de l'argument est déterminée de façon unique, grâce au résultat d'unicité modulo 2π énoncé au début de cette remarque.

4. voir Godement, Analyse I, p418 (v)