Développement: Hausdorffien d'un endomorphisme

Adrien Fontaine

16 janvier 2013

Référence : Gourdon Algèbre, et Sujet ENS MPI 1 2008

Théorème 1

1. *Soit E un espace vectoriel hermitien de dimension finie $n \geq 1$. Pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$, la partie*
$$H(f) = \{< f(x), x >, \|x\| = 1\} \subset \mathbb{C}$$
est un sous-ensemble convexe compact de $\mathbb{C}$. De plus, si f est un endomorphisme normal, alors $H(f)$ est exactement l'enveloppe convexe des valeurs propres de f.
2. *Par ailleurs, si $dim(E) = 2$, alors $H(f)$ est un disque elliptique de foyers les valeurs propres de f, et cette ellipse est dégénérée (c'est un segment) si, et seulement si, f est normal.*

Démonstration : 1. $H(f)$ est compact car c'est l'image du compact $\{x \in E, \|x\| = 1\}$, par l'application $x \mapsto < f(x), x >$ qui est continue.
Montrons maintenant que $H(f)$ est convexe. Soient $\xi =< f(x), x >$ et $\eta =< f(y), y >$ (avec $\|x\| = 1$ et $\|y\| = 1$) deux éléments de $H(f)$. On va montrer que $[\xi, \eta] \subset H(f)$. Si $\xi = \eta$, le résultat est trivial. On suppose donc désormais $\xi \neq \eta$.
On cherche g tel que
$$\begin{cases} < g(x), x > & = 1 \\ < g(y), y > & = 0 \end{cases}$$
Si on cherche g sous la forme $g = \bar{\alpha} f + \bar{\beta} Id_E$, cela revient à trouver α et $\beta \in \mathbb{C}$ tels que
$$\begin{cases} \alpha\xi + \beta & = 1 \\ \alpha\eta + \beta & = 0 \end{cases}$$
On prend alors $\alpha = \frac{1}{\xi - \eta}$ et $\beta = -\alpha\eta$.
On a alors :
$$\begin{aligned} & [\xi, \eta] \subset H(f) \\ & \Leftrightarrow \forall t \in [0,1], \exists z \in E \text{ tel que } \|z\| = 1 \text{ et } t\xi + (1-t)\eta =< f(z), z > \\ & \Leftrightarrow \forall t \in [0,1], \exists z \in E \text{ tel que } \|z\| = 1 \text{ et } \underbrace{\alpha(t\xi + (1-t)\eta) + \beta}_{=t} = \alpha < f(z), z > + \beta < z, z > \\ & \Leftrightarrow \forall t \in [0,1], \exists z \in E \text{ tel que } \|z\| = 1 \text{ et } t =< g(z), z > \\ & \Leftrightarrow [0,1] \subset H(g) \end{aligned}$$

Montrer que $[\xi, \eta] \subset H(f)$ revient donc à montrer que $[0,1] \subset H(g)$.
En posant $u = \frac{1}{2}(g + g^*)$ et $v = \frac{i}{2}(g - g^*)$, on décomposé g sous la forme

$$g = u + iv$$

avec u et v autoadjoints.
On a alors :

$$\begin{aligned} 1 &=< g(x), x > \\ &=< u(x) + iv(x), x > \\ &=< u(x), x > -i < v(x), x > \end{aligned}$$

et u et v étant autoadjoints, on a :

$$\forall x \in E, < u(x), x > \in \mathbb{R} \text{ et } < v(x), x > \in \mathbb{R}$$

donc, $< v(x), x >= 0$. De même, $< v(y), y >= 0$.
Enfin, quitte à multiplier par $\lambda \in \mathbb{C}$ avec $|\lambda| = 1$, on peut supposer $< v(x), y > \in i\mathbb{R}$.
Posons $h(t) = tx + (1-t)y$ pour $t \in [0,1]$.
Comme $\xi =< f(x), x > \neq < f(y), y >= \eta$, on a x et y qui forment une famille libre.
(Si $\xi = \lambda y$, alors comme $\|x\| = \|y\| = 1$, on a $|\lambda| = 1$ et alors $\xi =< f(x), x >=< f(\lambda y), \lambda y >= |\lambda|^2 < f(y), y >= \eta$.)
En particulier, $\forall t \in [0,1], h(t) \neq 0$.
Posons alors,

$$\begin{array}{rcll} \Psi & : & [0,1] & \rightarrow & \mathbb{C} \\ & & t & \mapsto & \frac{< g(h(t)), h(t) >}{\|h(t)\|^2} \end{array}$$

On a :
- $\forall t \in [0,1], h(t) \in \mathbb{R}$
- $\Psi(0) = 0$
- $\Psi(1) = 1$

Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $[0,1] \subset \Psi([0,1]) \subset H(g)$.
Donc, $H(f)$ est convexe.
De plus, si f est un endomorphisme normal, alors il existe une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ de E telle que :

$$Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \text{ avec } \forall 1 \leq i \leq n, \lambda_i \in \mathbb{C}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} H(f) &= \{< f(x), x >, \|x\| = 1\} \\ &= \{< f(\sum_{i=1}^n x_i e_i), \sum_{i=1}^n x_i e_i >, \sum_{i=1}^n |x_i|^2\} \\ &= \{\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \lambda_i, \text{ avec } \sum_{i=1}^n |x_i|^2 = 1\} \\ &= \{\sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i, \text{ où } \alpha_i \geq 0 \text{ et } \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1\} \end{aligned}$$

Et donc, $H(f)$ est l'enveloppe convexe de ses valeurs propres.

2. On va d'abord montrer un lemme qui se démontre en utilisant la connexité de $H(f)$.

Lemme 1

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $Tr(f) = 0$. Alors, il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de f a tous ses termes diagonaux nuls.

Démonstration : On procède par récurrence sur $n = dim(E)$.
Pour $n = 1$ le résultat est évident.
Supposons le résultat vrai pour le rang $n-1$ et montrons le au rang n.
Soit $\mathcal{B}_0$ une base orthonormée de E et $A = Mat_{\mathcal{B}_0}(f) = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$.
On a : $\forall 1 \leq i \leq n, < f(e_i), e_i >= \overline{a_{i,i}}$, donc $\overline{a_{i,i}} \in H(f)$.
Donc, par convexité de $H(f)$,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\overline{a_{i,i}} \in H(f)$$

i.e

$$\frac{1}{n}\overline{Tr(f)} = 0 \in H(f)$$

Donc, il existe ε_1 de norme 1 tel que

$$< f(\varepsilon_1), \varepsilon_1 >= 0$$

Soit $F =< \varepsilon_1 >^{\perp}$ et $g = p_F \circ f_{|F}$.
Pour toute base $\mathcal{B}'$ de F, on a :

$$Mat_{(\varepsilon_1, \mathcal{B}')}(f) = \begin{bmatrix} 0 & * & \dots & * \\ * & & & \\ \vdots & & Mat_{\mathcal{B}'}(g) & \\ * & & & \end{bmatrix}$$

On a $Tr(f) = Tr(g) = 0$ et $dim(F) = n-1$, donc on peut appliquer l'hypothèse de récurrence : il existe une base $\mathcal{B}'$ de F telle que $Mat_{\mathcal{B}'}(g)$ n'ait que des zéros sur la diagonale.
Il suffit alors de prendre $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \mathcal{B}')$. ∎

On suppose désormais $dim(E) = 2$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On pose $g = f - \frac{Tr(f)}{2}Id$ de sorte que $Tr(g) = 0$.
D'après le lemme, il existe une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ de E telle que :

$$Mat_{\mathcal{B}}(g) = \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}$$

On met a et b sous forme trigonométrique, en notant a_0 et b_0 leurs modules respectifs

$$a = a_0 e^{i\alpha} \text{ et } b = b_0 e^{i\beta}$$

Si $x = x_1 e_1 + x_2 e_2$ est un vecteur de E de norme 1, on a$|x_1|^2 + |x_2|^2 = 1$, donc il existe $\omega \in [0, \frac{\pi}{2}]$ tel que $|x_1| = \cos(\omega)$ et $|x_2| = \sin(\omega)$. Posons ensuite :

$$\begin{cases} \Phi & = arg(x_1) - \frac{\alpha-\beta}{2} \\ \theta & = arg(x_2) - \Phi \end{cases}$$

de sorte que $x_1 = \cos(\omega)e^{i(\Phi + \frac{\alpha-\beta}{2})}$ et $x_2 = \sin(\omega)e^{i(\theta+\Phi)}$.

Alors, la donnée de ω, Φ et θ détermine entièrement un x de norme 1. On a alors :

$$\begin{aligned}< g(x), x > &= \bar{b}\bar{x_1}x_2 + \bar{a}\bar{x_2}x_1 \\ &= b_0\cos(\omega)\sin(\omega)e^{-i\beta}e^{-i(\Phi+\frac{\alpha-\beta}{2})}e^{i(\theta+\Phi)} + a_0\cos(\omega)\sin(\omega)e^{-i\alpha}e^{i(\Phi+\frac{\alpha-\beta}{2})}e^{-i(\theta+\Phi)} \\ &= \frac{\sin(2\omega)}{2}e^{-i\frac{\alpha+\beta}{2}}(b_0e^{i\theta} + a_0e^{-i\theta}) \\ &= \frac{\sin(2\omega)}{2}e^{-i\frac{\alpha+\beta}{2}}((a_0+b_0)\cos(\theta) + (b_0-a_0)\sin(\theta))\end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}H(g) &= \{\frac{\sin(2\omega)}{2}e^{-i\frac{\alpha+\beta}{2}}((a_0+b_0)\cos(\theta) + (b_0-a_0)\sin(\theta)), \omega \in [0, \frac{\pi}{2}, \theta \in \mathbb{R}\} \\ &= e^{-i\frac{\alpha+\beta}{2}}\{\frac{\sin(2\omega)}{2}((a_0+b_0)\cos(\theta) + (b_0-a_0)\sin(\theta)), \omega \in [0, \frac{\pi}{2}, \theta \in \mathbb{R}\}\end{aligned}$$

L'exponentielle complexe qui est en facteur fait subir une rotation à l'ensemble auquel elle est multipliée.
Pour chaque $\omega \in [0, \frac{\pi}{2}$ fixé, l'ensemble

$$\mathcal{E}_\omega\{\frac{\sin(2\omega)}{2}((a_0+b_0)\cos(\theta) + (b_0-a_0)\sin(\theta)), \theta \in \mathbb{R}\}$$

est une ellipse de demi grand axe $\frac{a_0+b_0}{2}\sin(2\omega)$ sur l'axe réel, et de demi petit axe $|b_0 - a_0|\frac{\sin(2\omega)}{2}$.
Par suite, $H(g)$ est la réunion de toutes ces ellipses lorsque ω varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$. Le sinus variant continument de 0 à 1, $H(g)$ est le disque elliptique dont les axes sont de longueurs $|a| + |b|$ et $||a| - |b||$, centré en l'origine, tourné d'un angle $-\frac{\alpha+\beta}{2}$.
Par ailleurs, il est facile de vérifier que si λ et μ sont deux nombres complexes, alors

$$H(\lambda f + \mu Id) = \{\lambda z + \mu, z \in H(f)\}$$

Donc, $H(f)$ est le translaté de $H(g)$ par le vecteur d'affixe $\frac{Tr(f)}{2}$: c'est bien un disque elliptique.
<u>Étudions le cas où f est normal :</u>
Notons $\varepsilon = \frac{Tr(f)}{2}$. Remarquons que :

$$\begin{aligned}ff^* &= (g + \varepsilon Id)(g^* + \bar{\varepsilon}Id) \\ &= gg^* + \varepsilon g^* + \bar{\varepsilon}g + |\varepsilon|^2 Id\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}f^*f &= g^*g + \varepsilon g^* + \bar{\varepsilon}g + |\varepsilon|^2 Id \\ &= ff^* - gg^* + g^{ast}g\end{aligned}$$

Donc, f est normal, si et seulement si, g est normal.
Ensuite, on observe que

$$Mat_{\mathcal{B}}(gg^*) = \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & \bar{b} \\ \bar{a} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |a|^2 & 0 \\ 0 & |b|^2 \end{bmatrix}$$

$$Mat_{\mathcal{B}}(g^*g) = \begin{bmatrix} 0 & \bar{b} \\ \bar{a} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |a|^2 & 0 \\ 0 & |a|^2 \end{bmatrix}$$

Donc, g est normal, si et seulement si, $|a| = |b|$. Autrement dit, si et seulement si, $H(g)$ est dégénérée.
<u>Montrons que les foyers de $H(f)$ sont exactement les valeurs propres de f :</u>
On suppose $H(f)$ non dégénéré, i.e $|a| \neq |b|$.
On a vu que $H(g)$ est l'image par la rotation d'angle $-\frac{\alpha+\beta}{2}$ du disque elliptique dont la frontière est l'ellipse $\mathcal{E}$ d'équation cartésienne :

$$\frac{4x^2}{(|a| + |b|)^2} + \frac{4y^2}{(|a| - |b|)^2}$$

Les foyers de $\mathcal{E}$ ont alors pour affixe c et $-c$ avec

$$c^2 = \left(\frac{|a| + |b|}{2}\right)^2 - \left(\frac{|a|_|b|}{2}\right)^2 = |a||b|$$

Les foyers de la frontière de $H(g)$ sont donc les points d'affixe ω_1 et ω_2 :

$$\omega_1 = \sqrt{|a||b|}e^{-i(\frac{\alpha+\beta}{2})} \text{ et } \omega_2 = -\sqrt{|a||b|}e^{-i(\frac{\alpha+\beta}{2})}$$

autrement dit, les deux racines carrées de ab. Or, le polynôme caractéristique de g est $X^2 - ab$, les foyers de $H(g)$ sont donc bien les valeurs propres de g.
Enfin, on a vu que $H(f)$ est le translaté de $H(g)$ par le vecteur d'affixe ε. Les foyers de $H(f)$ sont alors $\omega_1 + \varepsilon$ et $\omega_2 + \varepsilon$. Mais, puisque $f = g + \varepsilon Id$, on a :

$$\begin{aligned}
\chi_f(X) &= det(f - XId) \\
&= det(g - (X - \varepsilon)Id) \\
&= (X - \varepsilon - \omega_1)(X - \varepsilon - \omega_2)
\end{aligned}$$

Les foyers de $H(f)$ sont donc exactement les valeurs propres de f. ■