Développement: Inégalité isopérimétrique

Adrien Fontaine

8 décembre 2012

Référence : Oraux X-ENS, Analyse 4, exercice 4.11p324

Théorème 1

Soit Γ une courbe du plan, régulière, de classe C^1 fermée, sans point multiple. On note L la longueur de Γ et A l'aire qu'elle délimite. Alors,

$$4\pi A \leq L^2$$

et il y a égalité, si et seulement si, Γ est un cercle.

Démonstration : Commençons par montrer l'inégalité de Wirtinger :

Lemme 1 (*Inégalité de Wirtinger*)

Soit $f \in C^1([0,1], \mathbb{C})$ telle que $\int_0^1 f = 0$, et $f(0) = f(1)$. Alors,

$$\int_0^1 |f|^2 \leq \frac{1}{4\pi^2} \int_0^1 |f'|^2$$

Démonstration : On prolonge f sur $\mathbb{R}$ en une fonction 1-périodique que l'on note encore f.

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et C^1 par morceaux. On a, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}
c_n(f') &= \int_0^1 f'(t) e^{-2i\pi nt} dt \\
&\underbrace{=}_{IPP} \left[f(t) e^{-2i\pi nt} \right]_0^1 + 2i\pi n \int_0^1 f(t) e^{2i\pi nt} dt \\
&= 2i\pi n c_n(f)
\end{aligned}$$

On applique alors la formule de Parseval :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |f(t)|^2 dt &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f')|^2 \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} |2n\pi c_n(f)|^2 \\
&\geq 4\pi^2 \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} |c_n(f)|^2 \\
&= 4\pi^2 \int_0^1 |f(t)|^2 dt
\end{aligned}$$

car $c_0(f) = 0$. ∎

Passons maintenant à la preuve de l'inégalité isopérimétrique. On suppose que la courbe admet une représentation paramétrique $t \in [0,1] \mapsto g(t)$, où g est de classe C^1, $g(0) = g(1)$ et g injective sur $[0,1[$ (l'injectivité de g vient du fait que Γ n'a pas de point double). On va changer de paramètre en prenant un multiple de l'abscisse curviligne, de manière à se ramener à un paramétrage dont de vecteur vitesse constant en norme. On pose pour $t \in [0,1]$:

$$\varphi(t) = \frac{1}{L} \int_0^t |g'(s)| ds$$

La dérivée de φ est $\frac{1}{L}|g'| > 0$ et $\varphi(1) = 1$. Donc, φ est un C^1 difféomorphisme de $[0,1]$ dans $[0,1]$. On pose alors $f = g \circ \varphi^{-1}$. La fonction f est alors un paramétrage admissible de Γ, de classe C^1. Elle est injective sur $[0,1]$ et vérifie $f(0) = f(1)$. De plus, $f' = \frac{g' \circ \varphi^{-1}}{\varphi' \circ \varphi^{-1}} = L \frac{g' \circ \varphi^{-1}}{|g' \circ \varphi^{-1}|}$ donc $|f'| = L$. En faisant éventuellement une translation de la courbe, ce qui ne change ni la longueur, ni l'aire, on peut supposer que $\int_0^1 f = 0$. On pose alors pour tout $t \in [0,1]$, $f(t) = x(t) + iy(t)$. D'après la formule de Green-Riemann, on a :

$$A = \frac{1}{2} \int_0^1 (x'y - xy')$$

Et donc :

$$\begin{aligned} \int_0^1 f\bar{f}' &= \int_0^1 (xx' + yy') + i(x'y - xy') = \frac{1}{2} \left[x^2 + y^2 \right]_0^1 + 2iA \\ &= \frac{1}{2} \left[|f|^2 \right]_0^1 + 2iA \\ &= 2iA \end{aligned}$$

En appliquant successivement l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité de Wirtinger, on a :

$$2A = |\int_0^1 f\bar{f}'| \leq \int_0^1 |f||f'| \leq \sqrt{\int_0^1 |f|^2 \int_0^1 |f'|^2} \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^1 |f'|^2 \leq \frac{1}{2\pi} L^2$$

car $|f'|^2 = L^2$. On a donc, $4\pi A \leq L^2$.
Étudions maintenant le cas d'égalité. Si $4\pi A = L^2$, il y a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz donc $|f|$ et $|f'|$ sont proportionnels. Comme $|f'| = L$, $|f|$ est constante et Γ étant fermé, c'est un cercle. La réciproque est évidente, si Γ est un cercle de rayon R, $A = \pi R^2$ et $L = 2\pi R$ donc $4\pi A = L^2$. ■