Développement: Lemme de Morse

Adrien Fontaine

11 novembre 2012

Référence : Rouvière, exercice 114p354 et 66p209

Lemme 1 (*Lemme de Morse*)

Soit $f : U \to \mathbb{R}^3$ une fonction de classe C^3 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ contenant l'origine. On suppose que $Df(0) = 0$ et que la forme quadratique associée à la matrice hessienne en 0, $D^2f(0)$, est non dégénérée, de signature $(p, n-p)$. Alors il existe un C^1-difféomorphisme φ entre deux voisinages de l'origine dans $\mathbb{R}^n$, de classe C^1, tel que $\varphi(0) = 0$ et, en posant $u = \varphi(x)$:

$$f(x) - f(0) = u_1^2 + ... + u_p^2 - u_{p+1}^2 - ... - u_n^2$$

On a d'abord besoin de la proposition suivante :

Proposition 1

On note E l'espace des matrices réelles de taille n à coefficients dans $\mathbb{R}$ et S le sous-espace des matrices symétriques. On fixe $A_0 \in S$ inversible. Soit $\varphi : E \to S$ l'application définie par

$$\varphi(M) = {}^tMA_0M$$

Alors, il existe un voisinage V de A_0 dans S, et une application $A \mapsto= \psi(A) = M$ de V dans l'ensemble des matrices inversibles, de classe C^1, telle que,

$$A = {}^t\psi(A)A_0\psi(A)$$

pour tout $a \in V$.

Démonstration : L'application φ est polynomiale donc de classe C^1 sur E. Pour $H \in E$, on a en munissant E et S d'une norme d'application linéaire :

$$\begin{aligned} \varphi(I+h) - \varphi(I) &= {}^tHA_0 + A_0H + {}^tHA_0H \\ &= {}^t(A_0)H + (A_0H) + \bigcirc(\|H\|^2) \end{aligned}$$

Par suite,

$$D\varphi(I)H = {}^t(A_0H) + A_0H$$

Le noyau de l'application linéaire $D\varphi(I) : E \to S$ est donc formé des matrices H telles que A_0H soit antisymétriques. Le noyau $D\varphi(I)$ a même dimension que l'espace des matrices antisymétriques de taille n, c'est à dire $n(n-1)/2$, la dimension de son image est donc $dim(E) - n(n-1)/2 = n(n+1)/2 = dim(S)$. Donc $D\varphi(I)$ est surjective.

Toute matrice étant de manière unique somme d'une symétrique et d'une antisymétrique, le sous-espace F de E formé des matrices M telles que $A_0M \in S$ est un supplémentaire du noyau de

$D\varphi(I)$ dans E, de plus I appartient à F.
Soit $\Phi : F \to S$ la restriction de φ à F. La différentielle $D\Phi(I)$ restriction à F de $D\varphi(I)$ est bijective puisque $Ker(D\varphi(I) \cap F = \{0\}$. Par le théorème d'inversion locale, il existe un voisinage ouvert U de I dans F (que l'on peut supposer contenu dans l'ouvert des matrices inversibles) tel que Φ soit un difféomorphisme de classe C^1 de U sur $V = \Phi(U)$. Ainsi, V est un voisinage ouvert $A_0 = \Phi(I) = \varphi(I)$ dans S, et pour tout $A \in V$, il existe une unique matrice inversible $M \in U$ telle que

$$A = {}^tMA_0M$$

et $M = \phi^{-1}(A) = \psi(A)$ est fonction continument différentiable de A. ■

Le résultat obtenu est que toute forme quadratique suffisamment voisine d'une forme quadratique non dégénérée lui est équivalente, c'est à dire se ramène à celle-ci par changement de base.
On est maintenant en mesure de démontrer le lemme de Morse.

Démonstration : La formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre un s'écrit au voisinage de 0

$$f(x) - f(0) = {}^txQ(x)x$$

où $Q(x)$ est la matrice symétrique

$$Q(x) = \int_0^1 (1-t)D^2f(tx)dt$$

fonction C^1 de x. D'après la proposition précédente, il existe une matrice inversible $M(x)$, fonction C^1 de x au voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$, telle que

$$Q(x) = {}^tM(x)Q(0)M(x)$$

d'où

$$f(x) - f(0) = {}^tyQ(0)y \text{ avec } y = M(x)x$$

Or, $Q(0) = (1/2)D^2f(0)$ est de signature $(p, n-p)$, et il existe donc une changement linéaire de coordonnées $y = Au$, où A est une matrice inversible, tel que

$${}^tyQ(0)y = {}^tu{}^tAQ(0)Au = u_1^2 + ... + u_p^2 - up + 1^2 - ... - u_n^2$$

ce qui donne à f l'expression voulue.
Enfin, l'application $x \mapsto u = A^{-1}M(x)$ a pour différentielle à l'origine $A^{-1}M(0)$ matrice inversible. D'après le théorème d'inversion locale, c'est un difféomorphisme de classe C^1 entre deux voisinages de l'origine dans $\mathbb{R}^n$. ■