Développement: Méthode de Newton

Adrien Fontaine

4 décembre 2012

Référence : Rouvière, exercice 49p152

1 Développement

Théorème 1

Soit $f : [c, d] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. On suppose $c < d$, $f(c) < 0 < f(d)$ et $f'(x) > 0$ pour tout $x \in [c, d]$. Soit a l'unique zéro de f sur le segment $[c, d]$. On considère la fonction

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Alors,

1. *Il existe $\alpha > 0$ tel que si I désigne le segment $[a - \alpha, a + \alpha]$, alors $F(I) \subset I$ et la suite définie par*
$$x_0 \in I, \forall n \geq 0, x_{n+1} = F(x_n)$$
a une convergence d'ordre deux vers a dans I : il existe une constante $C > 0$ telle que
$$\forall n \geq 0, |x_{n+1} - a| \leq C|x_n - a|^2$$

2. *Si de plus $f''(x) > 0$ pour tout $x \in [c, d]$, alors l'intervalle $I = [c, d]$ est stable par F et pour tout $x_0 \in I$, la suite (x_n) est strictement décroissante (ou constante) avec*
$$0 \leq x_{n+1} - a \leq C(x_n - a)^2$$
$$x_{n+1} - a \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\frac{f''(a)}{f'(a)}(x_n - a)^2$$
(pour cet équivalent, on a besoin de $x_0 > a$).

Démonstration : 1. Remarquons tout d'abord que, f étant strictement croissante sur $[c, d]$ (car $f' > 0$ sur $[c, d]$) et vérifiant l'inégalité $f(c) < 0 < f(d)$, f a bien un unique zéro dans l'intervalle $]c, d[$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires.

Pour $x \in [c,d]$, on a :

$$\begin{aligned} F(x) - a &= x - a - \frac{f(x) - f(a)}{f'(x)} \text{ car } f(a) = 0 \\ &= \frac{f(a) - f(x) - (a-x)f'(x)}{f'(x)} \end{aligned}$$

Or, par la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 entre x et a (ou entre a et x selon la position de x), il existe $z_x \in]x, a[$ ou $]a, x[$ tel que :

$$f(a) = f(x) + (a-x)f'(x) + f''(z_x)\frac{(a-x)^2}{2}$$

Et on obtient donc

$$F(x) - a = \frac{1}{2}\frac{f''(z_x)}{f'(x)}(x-a)^2$$

Donc, si on pose $C = \frac{\max_{[c,d]} |f''|}{2\min_{[c,d]} |f'|}$, on a :

$$\forall x \in [c,d], |F(x) - a| \leq C|x-a|^2$$

Soit alors $\alpha > 0$ tel que $I = [a-\alpha, a+\alpha] \subset [c,d]$ et $C\alpha < 1$. On a alors :

$$\forall x \in I, |F(x) - a| \leq C\alpha^2 = C\alpha \times \alpha < \alpha$$

Donc, $F(I) \subset I$.
On peut alors définir la suite (x_n) :

$$x_0 \in I, \forall n \geq 0, x_{n+1} = F(x_n)$$

Et cette suite vérifie,

$$\forall n \geq 0, |x_{n+1} - a| = |F(x_n) - a| \leq C|x_n - a|^2$$

Et donc, par récurrence immédiate :

$$C|x_n - a| \leq (C|x_0 - a|)^{2^n} \leq (C\alpha)^{2^n} \to 0$$

D'où la convergence d'ordre 2 de x_n vers a, puisque $C\alpha < 1$.

2. On suppose maintenant $f'' > 0$. La dérivée f' est donc croissante, et la fonction f est une fonction convexe sur l'intervalle $]c, d[$. Pour $a \leq x \leq d$, on a $f'(x) > 0$ et $f(x) \geq 0$ d'où

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \leq x$$

avec inégalité stricte si $x > a$. Par ailleurs, on a :

$$F(x) - a = \frac{1}{2}\frac{f''(z_x)}{f'(x)}(x-a)^2 \geq 0$$

strictement si $x > a$.
On a donc, pour tout $x \in [a,d]$, $a \leq F(x) \leq x \leq d$. Ainsi, l'intervalle $[a,d]$ est stable par F. Par ailleurs, pour $a < x_O \leq d$, les itérées x_n vérifient aussi $a < x_n \leq l$ et forment une suite décroissante. Si $x_0 = a$, la suite est constante. La suite (x_n) admet donc une limite l, qui vérifie $F(l) = l$ et donc $f(l) = 0$ et l ne peut être que a.
La convergence de (x_n) vers a est quadratique : on a comme précédemment

$$0 \leq x_{n+1} - a \leq C(x_n - a)^2$$

Enfin, cette inégalité est essentiellement optimale : si $a < x_0 \leq d$, on a $x_n > a$ pour tout n et

$$\frac{x_{n+1} - a}{(x_n - a)^2} = \frac{1}{2} \frac{f''(z_n)}{f'(x_n)}$$

ou l'on a noté les $z_n = z_{x_n}$, avec $a < z_n < x_n$. La fraction tend donc vers $f''(a)/2f'(a)$ lorsque n tend vers l'infini. ■

2 Interprétation de la méthode de Newton

2.1 Interprétation géométrique

L'égalité

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

peut se réécrire sous la forme

$$f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) = 0$$

ce qui exprime que $x_{n+1} = F(x_n)$ est l'abscisse de l'intersection avec l'axe Ox de la droite $y = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n)$, qui est la tangente au graphe de f au point d'abscisse x_n.

2.2 Interprétation comme problème de point fixe

Pour résoudre $f(x) = 0$ on cherche à transformer l'équation en un problème équivalent de $F(x) = x$. Une idée est de considérer $F(x) = x + \lambda(x)f(x)$, où λ est une fonction ne s'annulant pas. La convergence des itérés $x_{n+1} = F(x_n)$ vers la solution a cherchée sera très rapide si ce point est superattractif (voir Rouvière, exercice 48p149) i.e $F'(a) = 0$. Ceci incite à choisir, $\lambda(x) = -1/f'(x)$.