Développement: Prolongement méromorphe de Γ sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$

Adrien Fontaine

24 novembre 2012

Référence : Zuily-Queffelec p313 pour l'holomorphie de Γ sur $\{z/Re(z) > 0\}$ et Objectif Agrégation, exercice 2.10p82 pour la suite.

Proposition 1

Considérons la fonction Γ d'Euler définie sur $\mathcal{P} = \{z/Re(z) > 0\}$ par

$$\begin{array}{cccc} \Gamma & : & \mathcal{P} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ & & z & \mapsto & \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{z-1}dt \end{array}$$

La fonction Γ est holomorphe sur $\mathcal{P}$ et se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$.

Démonstration : Γ est holomorphe sur $\mathcal{P}$. En effet :

- $\forall z, t \mapsto e^{-t}t^{z-1}$ est mesurable sur $\mathbb{R}_+$.
- $\forall t, z \mapsto e^{-t}t^{z-1}$ est holomorphe sur $\mathcal{P}$.
- Soit K un compact de $\mathcal{P}$. On a $Re(z) \in [\varepsilon, M]$, pour tout $z \in K$ pour un certain $\varepsilon > 0$ et un $M > 0$. D'où, pour tout $z \in K$:

$$\begin{aligned} |e^{-t}t^{z-1}| &\leq e^{(\varepsilon-1)\ln(t)} = \frac{1}{t^{1-\varepsilon}} \text{ si } t \in]0,1] \\ &\leq t^{M-1}e^{-t} \text{ si } t \geq 1 \end{aligned}$$

  et ces deux fonctions sont intégrables.

On peut alors appliquer le théorème d'holomorphie sous le signe intégrale pour en déduire l'holomorphie de Γ sur $\mathcal{P}$.

Montrons que pour tout $z \in \mathcal{P}$:

$$\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)} + \int_1^{+\infty} e^{-t}t^{z-1}dt$$

On a :

$$\Gamma(z) = \int_0^1 e^{-t}t^{z-1}dt + \int_1^{+\infty} e^{-t}t^{z-1}dt$$

On écrit alors :

$$e^{-t}t^{z-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^{n+z-1}$$

et on va essayer d'intervertir somme et intégrale dans

$$\int_0^1 e^{-t}t^{z-1}dt = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^{n+z-1}dt$$

Il suffit pour cela de montrer que

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} |\frac{(-1)^n}{n!} t^{n+z-1}| dt < +\infty$$

Or,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |\frac{(-1)^n}{n!} t^{n+z-1}| = t^{Re(z)-1} e^t$$

Comme $Re(z) > 0$ sur $\mathcal{P}$, $t \mapsto t^{Re(z)-1} e^t$ est intégrable et on obtient d'après le théorème de Fubini que :

$$\int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)}$$

Montrons maintenant que $f : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)}$ est méromorphe sur $\mathbb{C}$ et ses pôles sont les entiers négatifs ou nuls, et ils sont simples.

- Pour tout n, $f_n : z \mapsto \frac{(-1)^n}{n!(z+n)}$ est méromorphe sur $\mathbb{C}$ avec pour seul pôle simple l'entier $-n$.
- Soit K un compact de $\mathbb{C}$: il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $K \subset \bar{D}(0, N)$ et $\forall n > N$, f_n n'a pas de pôle dans K. De plus,

  $$\forall z \in K, |z+n| \geq n - |z| \geq n - N$$

  Donc,

  $$\forall z \in K, |f_n(z)| \leq \frac{1}{n!(n-N)}$$

  Et donc, on peut appliquer le théorème de méromorphie sous le signe somme car $\sum_{n>N} f_n$ est normalement convergente sur K.

Donc, f est ine fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$, ses pôles simples étant les entiers négatifs.
On peut maintenant conclure quant au prolongement de Γ en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$.
On applique le théorème d'holomorphie sous le signe intégrale.

$$\forall t \geq 1, z \mapsto \int_1^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$$

est holomorphe sur $\mathbb{C}$ tout entier. Alors,

$$z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)} + \int_1^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$$

établit une prolongement méromorphe de la fonction Γ sur $\mathbb{C}$.
Le théorème de prolongement analytique entraîne de plus que c'est le seul prolongement analytique de Γ sur l'ouvert connexe $\mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$. ■