Développement: Racines de la dérivée d'un polynôme du troisième degré

Adrien Fontaine

16 janvier 2013

Référence : Marden, *Geometry of polynomials* et Berger, *Géométrie* (pour le deuxième petit théorème de Poncelet)

Théorème 1

Soient M_1, M_2 et M_3 trois points non alignés dans le plan de la variable complexe, d'affixes respectives z_1, z_2 et z_3. Soit

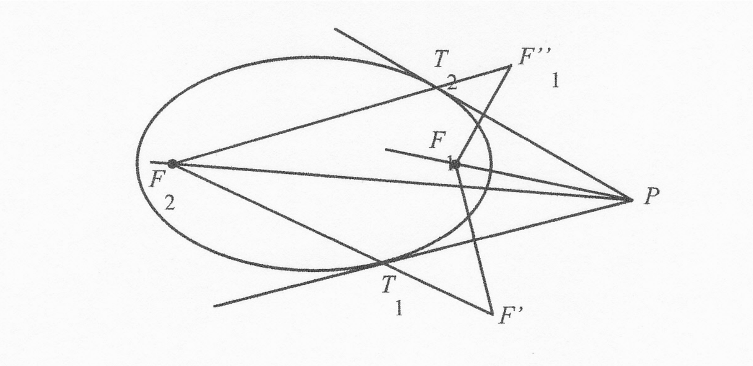
$$P(X) = (X - z_1)(X - z_2)(X - z_3)$$

Alors, les racines du polynôme dérivé P' sont les foyers d'une ellipse, tangente aux trois côtés du triangle $M_1M_2M_3$ en leurs milieux.

Théorème 2 (*Deuxième petit théorème de Poncelet*)

Soit E une ellipse de foyers F_1 et F_2, P un point extérieur à E. Soient PT_1 et PT_2, les tangentes à E passant par P, où T_1 et T_2 sont les points de tangence. Alors les angles de droites (PT_1, PF_1) et (PT_2, PF_2) sont égaux.

Démonstration : On utilise la propriété tangentielle des ellipses. La tangente PT_1 est la bissectrice



extérieure de l'angle $(\overrightarrow{T_1F_1}, \overrightarrow{T_1F_2})$. Donc, si F_1' est le symétrique orthogonal de F_1 par rapport à la tangente PT_1, alors les points F_2, T_1 et F_1' sont alignés et on a

$$\begin{aligned} d(F_2, F_1') &= d(F_2, T_1) + d(T_1, F_1') \\ &= d'F_2, T_1) + d(T_1, F_1) \\ &= 2a \end{aligned}$$

avec a le demi grand axe de l'ellipse.
De même, PT_2 est la bissectrice extérieure de l'angle $(\overrightarrow{T_2F_1}, \overrightarrow{T_2F_2})$ et donc si F_1'' est le symétrique orthogonal de F_1 par rapport à la droite PT_2, alors les points F_2, T_2 et F_1'' sont alignés et on a :

$$d(F_2, F_1'') = 2a$$

Par ailleurs, si R_D désigne la symétrie orthogonale par rapport à une droite D, et si D et D' sont deux droites qui s'intersectent en un point O, on sait que $R_D \circ R_{D'}$ est la rotation de centre O et d'angle, deux fois l'angle de droites (D, D'). Donc, pour montrer le deuxième petit théorème de Poncelet, il suffit de vérifier que $R_{PF_1} \circ R_{PT_1}$ et $R_{PT_2} \circ R_{PF_2}$ sont la même rotation de centre P. Pour cela, on va montrer que F_1' a la même image par ces deux transformations.
On a tout d'abord clairement,

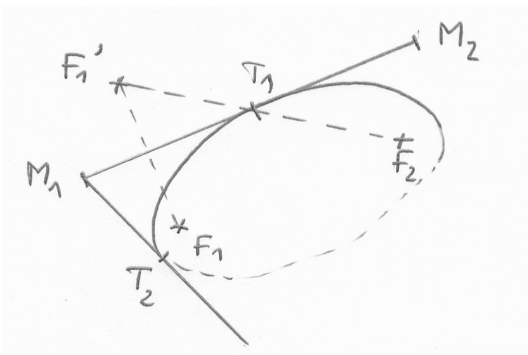
$$R_{PF_1}(R_{PT_1}(F_1')) = R_{PF_1}(F_1) = F_1$$

De plus, $d(F_2, F_1') = d(F_2, F_1'') = 2a$ d'après ce que l'on a vu plus haut. Et $d(P, F_1') = d(P, F_1) = d(P, F_1'')$. Donc, PF_2 est la médiatrice de $F_1'F_1''$.
Donc, $R_{PF_2}(F_1') = F_1''$.
Et, $R_{PT_2}(F_1'') = F_1$.
Ce qui conclut la démonstration. ■

Démonstration du théorème 1 : Soient F_1 et F_2 les points d'affixe ω_1 et ω_2, où ω_1 et ω_2 sont les racines de P'. D'après le théorème de Gauss-Lucas, F_1 et F_2 sont dans le triangle $M_1M_2M_3$. Construisons l'ellipse E de foyers F_1 et F_2 qui est tangente au côté M_1M_2. Pour cela on prend F_1' le symétrique orthogonal de F_1 par rapport à M_1M_2 et on considère T_1 le point d'intersection de M_1M_2 avec F_2F_1'. D'après la propriété tangentielle des ellipses, l'ensemble des points Q tels que

$$d(F_1, Q) + d(F_2, Q) = d(F_1, T_1) + d(F_2, T_1)$$

est l'ellipse de foyers F_1 et F_2 qui est tangente au côté M_1M_2. Soit M_1T_2 la deuxième tangente à



E issue de M_1. D'après le deuxième petit théorème de Poncelet, on a :

$$(M_1M_2, M_1F_1) = (M_1F_2, M_1T_2)$$

Par ailleurs, on remarque que $P'(X)$ s'écrit de deux manières :

$$\begin{aligned} P'(X) &= 3(X - \omega_1)(X - \omega_2) \\ &= (X - z_1)(X - z_2) + (X - z_1)(X - z_3) + (X - z_2)(X - z_3) \end{aligned}$$

d'où, en évaluant en $X = z_1$,

$$3(z - 1 - \omega_1)(z_1 - \omega_2) = (z_1 - z_2)(z_1 - z_3)$$

i.e
$$\frac{z_2 - z_1}{\omega_1 - z_1} = 3\frac{\omega_2 - z_1}{z_3 - z_1}$$
d'où en passant aux arguments,
$$(M_1M_2, M_1F_1) = (M_1F_2, M_1M_3)$$
Donc, $(M_1M_2, M_1F_1) = (M_1F_2, M_1M_3) = (M_1F_2, M_1T_2)$. Et donc M_1T_2 coïncide avec M_1M_3. Donc, E est tangente au côté M_1M_3. De même, en échangeant les rôles des sommets, on montre que E est tangente au côté M_2M_3.
Il reste à vérifier que les points de tangence de l'ellipse E sont bien les milieux des côtés du triangle. Montrons le pour le milieu I du segment M_1M_2 d'affixe $\frac{z_2+z_2}{2}$. Il suffit de vérifier que M_1M_2 est la bissectrice extérieure de $(\overrightarrow{IF_1}, \overrightarrow{IF_2})$ et donc de montrer l'égalité d'angles $(\overrightarrow{IM_1}, \overrightarrow{IF_1}) = (\overrightarrow{IF_2}, \overrightarrow{IM_2})$. En faisant, $X = \frac{z_1+z_2}{2}$ dans les deux expressions de $P'(X)$, on obtient :
$$3(\frac{z_1 + z_2}{2} - \omega_1)(\frac{z_1 + z_2}{2} - \omega_2) = (\frac{z_2 - z_1}{2})(\frac{z_1 - z_2}{2})$$
d'où,
$$12\frac{\omega_1 - \frac{z_1+z_2}{2}}{z_1 - z_2} = \frac{z_2 - z_1}{\omega_2 - \frac{z_1+z_2}{2}}$$
d'où l'égalité des angles en passant aux arguments. ■