Développement: réduction des endomorphismes autoadjoints

Florentin Damiens et Adrien Fontaine

10 octobre 2013

Théorème 1

Soit E un espace euclidien ou hermitien de dimension finie, et f un endomorphisme autoadjoint. Alors il existe une base orthonormée de vecteurs propres de f et de plus, les valeurs propres sont réelles.

Démonstration : La preuve se fait par récurrence sur la dimension de E.

Pour $n = 1$, le résultat est évident.

Supposons le résultat vrai jusqu'au rang $n - 1$. Montrons le au rang n. Soit

$$\begin{array}{cccc} \phi & : & E & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & < x, f(x) > \end{array}$$

C'est une forme quadratique de forme polaire $\varphi(x, y) =< x, f(y) >$ (facile à démontrer en utilisant le caractère autoadjoint de f). Par ailleurs, comme on est en dimension finie, la sphère unité de E, $S = \{x \in E/\|x\| = 1\}$ est compacte et comme ϕ est continue,

$$\exists x_0 \in S/\phi(x_0) = \sup_{x \in S} \phi(x) = \lambda$$

On considère maintenant la forme quadratique, $\phi_1(x) = \lambda\|x\|^2 - \phi(x)$. ϕ_1 est positive par construction de λ et $\phi_1(x_0) = 0$, *i.e* ϕ_1 n'est pas définie, et donc ϕ_1 est dégénérée. (une forme positive non définie est non dégénérée, grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz)

La forme polaire de ϕ_1 étant $\varphi_1(x, y) =< x, g(y) >$ avec $g = \lambda Id_E - f$, la dégénérescence de ϕ_1 entraîne l'existence de $x \neq 0$ tel que pour tout $y \in E$, $\varphi(x, y) = 0 =< x, g(y) >$. L'application g n'est donc pas surjective (x n'est pas atteint) donc non injective (dimension de E finie), donc il existe e_1 normé tel que $g(e_1) = 0$ *i.e* $f(e_1) = \lambda e_1$ (λ est valeur propre associée au vecteur propre e_1).

Posons $H = Vect(e_1)^\perp$. Alors H est stable par f (vérification immédiate). La restriction de f à H étant autoadjointe, on peut alors appliquer l'hypothèse de récurrence. Il existe $(e_2, ..., e_n)$ une base orthonormée de H constitué de vecteurs propres de f. Et toutes les valeurs propres sont réelles. La base $(e_1, ..., e_n)$ est alors une base orthonormée de E constituée de vecteurs propres de f et associés à des valeurs propres réelles. ■

Traduction matricielle : Soit $M \in M_n(\mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), une matrice symétrique (ou hermitienne) (*i.e* associée à un endomorphisme autoadjoint). Alors il existe C orthogonale (ou unitaire) telle que $C^{-1}MC = C^tMC = D$ où D est diagonale réelle.

Corollaire 1

Soit ϕ une forme quadratique (resp. hermitienne)sur un espace euclidien (resp. hermitien) E.

Alors il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de ϕ est diagonale réelle.

Démonstration : Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E et soit M ma matrice de ϕ dans la base $\mathcal{B}$. La matrice M est symétrique (resp. hermitienne), et d'après la traduction matricielle précédente, il existe une matrice C orthogonale (resp. unitaire) telle que $C^*MC = D$ est diagonale réelle. La matrice C définit un changement de base orthogonal qui fait passer de la base $\mathcal{B}$ à une base orthonormée $\mathcal{B}'$, et la matrice de ϕ dans la base $\mathcal{B}'$ est D d'où le résultat. ■

Corollaire 2

Soient M et N deux matrices symétriques (resp. hermitiennes), telles que la matrice M soit définie positive. Alors il existe une matrice C inversible telle que

$$C^*MC = In \text{ et } C^*NC = D$$

où D est une matrice diagonale réelle.

Démonstration : Sur $E = \mathbb{R}^n$ (resp. sur $E = \mathbb{C}^n$), l'application $\phi : (X, Y) \mapsto X^*MY$ défini un produit scalaire, et $\psi : X \mapsto X^*NX$ une forme quadratique (resp. hermitienne). D'après le corollaire précédent, il existe une base $\mathcal{B}$ orthonormée (pour le produit scalire ϕ) telle que la matrice D de ψ dans $\mathcal{B}$ soit diagonale réelle. En désignant par C la matrice de passage de la base canonique de E à la base $\mathcal{B}$, on a $C^*MC = In$ et $C^*NC = D$, d'où le résultat. ■

Application

1. Racine d'une matrice carrée H hermitienne positive :
   Soit $H \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice hermitienne positive. Alors il existe une unique matrice hermitienne positive R telle que $H = R^2$.
   Existence
   La matrice H étant hermitienne, il existe une matrice unitaire C telle que

   $$C^*HC = C^{-1}HC = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{bmatrix} = D$$

   D étant diagonale réelle . Comme H est positive, tous les λ_i sont positifs donc pour tout i, il existe $\mu_i \geq 0$ tel que $\lambda_i = \mu_i^2$. En posant,

   $$D' = \begin{bmatrix} \mu_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \mu_n \end{bmatrix}$$

   on a $D'^2 = D$ de sorte que $R = CD'C^{-1} = CD'C^*$ est hermitienne positive et vérifie

   $$R^2 = CD'^2C^{-1} = CDC^{-1} = H$$

   Unicité
   Soit R hermitienne positive telle que $R^2 = H$. Soient h et r les endomorphismes de $\mathbb{C}^n$ dont H et R sont les matrices dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$. Comme H est hermitienne, h est autoadjoint. Ses valeurs propres $\lambda_1, ..., \lambda_p$ sont positives car H est positive. Notons

$E_{\lambda_1}, ..., E_{\lambda_p}$ les sous-espaces propres correspondants. Comme r commute avec $r^2 = h$, chaque E_{λ_i}est stable par r. On note $r_{|E_{\lambda_i}}$. On a $r_i^2 = \lambda_i Id_{E_{\lambda_i}}$, et r_i est autoadjoint positif ; toute valeur propre μ de r_i vérifie $\mu^2 = \lambda_i$, donc $\mu = \sqrt{\lambda_i}$ est la seule valeur propre possible de r_i (car les valeurs propres de r_i qui sont des valeurs propres de r donc de R, sont positives). Comme r_i est de plus diagonalisable (car autoadjoint), on en déduit $r_i = \sqrt{\lambda_i} Id_{E_{\lambda_i}}$. Résumons. Si $r^2 = h$, alors forcément pour tout i, $r_{|E_{\lambda_i}} = \sqrt{\lambda_i} Id_{|E_{\lambda_i}}$, ce qui définit r de manière unique, d'où l'unicité de R.

2. Décomposition polaire :
   Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Alors il existe un unique couple $(O, S) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $A = OS$.
   Existence
   Si $A = OS$ alors $A^t = SO^{-1}$ donc $A^t A = S^2$. Or, la matrice $A^t A$ est symétrique définie positive (vérification immédiate) donc d'après la première application que l'on vient de démontrer, il existe S symétrique définie positive telle que $A^t A = S^2$.
   Par ailleurs, A étant inversible, S est inversible, donc en posant $O = AS^{-1}$, on a $O^t O = S^{-1} A^t A S^{-1} = I_n$ donc $O \in O_n(\mathbb{R})$ et $A = OS$ d'où l'existence.
   Unicité
   D'après la première application que l'on a démontré, il y a unicité de la matrice S et donc également de O car $O = AS^{-1}$.