Développement: Surjectivité de l'exponentielle

Adrien Fontaine

11 octobre 2013

Référence : La preuve, telle qu'elle est écrite ici, n'est pas référencée. On peut cependant trouver les grandes lignes du développement dans (l'excellent !) livre de Maxime Zavidovique, Un max de Math.

Théorème 1 (*Surjectivité de l'exponentielle*)

Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$, alors il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $A = exp(P(A))$. En particulier, l'application exponentielle de $M_n(\mathbb{C})$ dans $Gl_n(\mathbb{C})$ est surjective.

Démonstration : On considère la sous-algèbre $\mathbb{C}[A]$ de $M_n(\mathbb{C})$ engendrée par A. C'est une algèbre commutative de dimension finie sur $\mathbb{C}$, isomorphe à $\mathbb{C}[X]/(\Pi)$ avec Π le polynôme minimal de A.
Comme $\mathbb{C}[A]$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie, il est fermé dans $M_n(\mathbb{C})$ et donc pour $M \in \mathbb{C}[A]$, $exp(M)$ étant la limite d'une suite de polynômes en M (et donc en A), on $M \in \mathbb{C}[A]$.
De plus, on a également $exp(M)^{-1} \in \mathbb{C}[A]$ car $\exp(M)^{-1} = exp(-M)$.
Comme $\mathbb{C}[A]$ est une algèbre commutative, on en déduit que exp réalise un morphisme de groupes de $(\mathbb{C}[A], +)$ dans $(\mathbb{C}[A]^{\times}, .)$.
On va maintenant montrer que l'image $exp(\mathbb{C}[A])$ est un ouvert fermé de $\mathbb{C}[A]^{\times}$. Pour $H \in \mathbb{C}[A]$, on a :

$$exp(0 + H) = I_n + H + o(H^2)$$

Donc, exp est différentiable en $0 \in \mathbb{C}[A]$ et sa différentielle en 0 est l'identité qui est inversible. On peut donc appliquer le théorème d'inversion locale : il existe un voisinage ouvert V_0 de 0 et V un voisinage ouvert de l'identité, tels que exp réalise un difféomorphisme de V_0 dans V.

1. $exp(\mathbb{C}[A])$ **est ouvert dans** $(\mathbb{C}[A]^{\times}, .)$ **:** Soit $M \in \mathbb{C}[A]^{\times}$, comme $In \in V$, on a $M \in MV \subset exp(\mathbb{C}[A]) \subset \mathbb{C}[A]$. Par continuité de $(M, M') \mapsto MM'$, il vient que MV est un voisinage ouvert de M, inclus dans $exp(\mathbb{C}[A])$. Donc, $exp(\mathbb{C}[A])$ est un voisinage ouvert de chacun de ses points, donc c'est un ouvert.
2. $exp(\mathbb{C}[A])$ **est fermé dans** $(\mathbb{C}[A]^{\times}, .)$ **:** On peut écrire

$$^{c}exp(\mathbb{C}[A]) = \bigcup_{M \notin exp(\mathbb{C}[A])} MV$$

Comme MV est ouvert pour tout M, $^{c}exp(\mathbb{C}[A])$ est ouvert, et le résultat est montré.

Il nous reste à montrer que $\mathbb{C}[A]^{\times}$ est connexe pour conclure.
Soient M et N dans $\mathbb{C}[A]^{\times}$. Soit $P(X) = det(XM + (1-N)X)$, on note $\mathbb{C}_{M,N} = \mathbb{C} \setminus \{\text{zéros de } P\}$.
L'ensemble des zéros de P étant en nombre fini, $\mathbb{C}_{M,N}$ est un ensemble connexe. L'image de $\mathbb{C}_{M,N}$ par l'application continue $z \mapsto zM + (1-z)N$ est donc une connexe de $\mathbb{C}[A]^{\times}$ contenant M et N, donc $\mathbb{C}[A]^{\times}$ est connexe.
En conclusion, $exp(\mathbb{C}[A])$ est un ouvert-fermé de $\mathbb{C}[A]^{\times}$ qui est connexe, donc $exp(\mathbb{C}[A]) = \mathbb{C}[A]^{\times}$. ■