Développement: Théorème d'isomorphisme de Fourier

Adrien Fontaine

4 septembre 2013

Référence : Zuily-Queffelec, p329

Définition 1

Pour $u \in \mathcal{S}$, la transformée de Fourier de u, notée $\hat{u}$ ou $\mathcal{F}u$, est la fonction définie sur $\mathbb{R}$, par

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \hat{u}(\xi) = \mathcal{F}u(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} u(x) dx$$

Théorème 1

La transformée de Fourier $\mathcal{F}$ est une application linéaire bijective de $\mathcal{S}$ sur $\mathcal{S}$. Si on pose, pour $v \in \mathcal{S}$,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \overline{\mathcal{F}}v(x) = (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} v(\xi) d\xi$$

alors, $\overline{\mathcal{F}}$ envoie $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}$ et on a $\mathcal{F}\overline{\mathcal{F}} = \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}$ =identité de $\mathcal{S}$, i.e *$\mathcal{F}^{-1} = \overline{\mathcal{F}}$.*

Démonstration : Tout d'abord, $\hat{f}$ existe car $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$.

- Montrons que $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$
  - $\hat{f}$ est C^∞ :
    (i) $\forall x \in \mathbb{R}, t \mapsto e^{-itx} f(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$
    (ii)
    $$\forall q \in \mathbb{N}, \left| \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^q \left[e^{-itx} f(x)\right] \right| = |x|^q |f(x)|$$
    Or, $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, donc $\exists C \geq 0$ tel que
    $$|(x + x^{q+2}) f(x)| \leq C$$
    Donc,
    $$\left| \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^q \left[e^{-itx} f(x)\right] \right| \leq \frac{C}{(1+x^2)} \in L^1(\mathbb{R})$$
    Donc, $\hat{f} \in C^\infty(\mathbb{R})$ et
    $$\hat{f}^{(q)}(t) = \int_{br} (-ix)^q e^{-itx} f(x) dx$$
  - $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$: Nous allons montrer, par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$, que pour tout $q \in \mathbb{N}$, il existe $g_{p,q} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ telle que
    $$t^p \hat{f}^{(q)}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} g_{p,q}(x) dx$$

ce qui permettra de conclure, puisqu'alors, on aura

$$\forall t \in \mathbb{R}, |t^p \hat{f}^{(q)}(t)| \leq \int_{\mathbb{R}} |g_{p,q}(x)dx| = C_{p,q} < +\infty \text{ car } g_{p,q} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$$

Pour $p = 0$, le résultat est vrai, puisque $x^q f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.
On suppose le résultat vrai pour un certain $p \in \mathbb{N}$. Alors,

$$\begin{aligned}
\forall q \in \mathbb{N}, t^p \hat{f}^{(q)}(t) &= \int_{\mathbb{R}} g_{p,q}(x)e^{-itx}dx \\
&\underbrace{=}_{IPP} \underbrace{\left[g_{p,q}(x)\frac{e^{-itx}}{-it} \right]_{-\infty}^{+\infty}}_{=0 \text{ car } g_{p,q} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})} + \frac{1}{it}\int_{\mathbb{R}} e^{-itx} g'_{p,q}(x)dx
\end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned}
t^{p+1}\hat{f}(q)(t) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{g'_{p,q}(x)}{i} e^{-itx}dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} g_{p+1,q}(x)e^{-itx}dx
\end{aligned}$$

et

$$g_{p+1,q} = \frac{g'_{p,q}}{i} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

ce qui conclut la récurrence.

- Montrons maintenant que si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \hat{f}(t)dt$$

Soit $\varepsilon > 0$. On considère

$$\int_{\mathbb{R}} e^{itx} e^{-\varepsilon t^2} \hat{f}(t)dt$$

Pour prouver que $f(x) = \frac{1}{2\pi}\int e^{itx}\hat{f}(t)dt$, il nous faut considérer l'intégrale , $\int e^{ixt}\left(\int e^{-iyt} f(y)dy\right)dt$, et on a envie d'échanger l'ordre d'intégration grâce au théorème de Fubini. Mais, la fonction $(y,t) \mapsto e^{ixt}e^{-iyt}f(y)$ n'appartient pas à $L^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$. C'est pourquoi on introduit le facteur $e^{-\varepsilon t^2}$.

Comme,

$$|e^{itx}e^{-\varepsilon t^2}\hat{f}(t)| \leq |\hat{f}(t)| \in L^1(\mathbb{R})$$

on a d'après le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}} e^{itx}e^{-\varepsilon t^2}\hat{f}(t)dt = \int_{\mathbb{R}} e^{itx}\hat{f}(t)dt$$

Or,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{itx}e^{-\varepsilon t^2}\hat{f}(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{itx}e^{-\varepsilon t^2}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-ity}f(y)dy\right)dt$$

Et

$$\int_{br^2} |e^{itx}e^{-\varepsilon t^2}e^{-ity}f(y)|dydt \underbrace{=}_{\text{Fubini-Tonelli}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\varepsilon t^2}dt\right)\left(\int_{\mathbb{R}} |f(y)|dy\right) < +\infty$$

Donc, $(y,t) \mapsto e^{ixt}e^{-iyt}f(y)$ appartient à $L^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$. Donc, d'après le théorème de Fubini, on peut échanger l'ordre d'intégration :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{br} e^{itx}e^{-\varepsilon t^2}\hat{f}(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{br} f(y) \underbrace{\left(\int_{br} e^{-it(y-x)}e^{-\varepsilon t^2}dt\right)}_{=\sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}}e^{-(y-x)^2/4\varepsilon}\text{(transformée de Fourier d'une Gaussienne)}} dy$$

Donc,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{itx}e^{-\varepsilon t^2}\hat{f}(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} f(y)\sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}}e^{-(y_x)^2/4\varepsilon}dy$$
$$\underbrace{=}_{u=\frac{y-x}{2\sqrt{\varepsilon}}} \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(x+2\sqrt{\varepsilon}u)e^{-u^2}du$$

Donc,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{itx}\hat{f}(t)dt = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(x+2\sqrt{\varepsilon}u)e^{-u^2}du$$

Or,

$$|f(x+2\sqrt{\varepsilon}u)e^{-u^2}| \leq \|g\|_\infty e^{-u^2} \in L^1(\mathbb{R})$$

Donc, par le théorème de convergence dominée, et par continuité de f,

$$\forall x\in\mathbb{R}, \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{itx}\hat{f}(t)dt = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-u^2}du\right)f(x) = f(x)$$

$\mathcal{F}$ est donc un isomorphisme de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. ∎

Remarque 1

- *On pourrait également montrer que $\mathcal{F}$ est un homéomorphisme de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, mais cela demande de connaître la topologie de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ (espace de Fréchet).*
- *En se donnant un peu de peine sur les notations (mais pas sur la forme), on généralise facilement ce résultat à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.*
- *La démonstration pour la formule d'inversion de Fourier marche presque de la même façon pour $f\in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\hat{f}\in L^1(\mathbb{R})$. Il suffit simplement de modifier la fin : on ne fait pas le changement de variable $u=\frac{y-x}{\sqrt{\varepsilon}}$, et à la place, on reconnait le produit de convolution de f avec une approximation de l'identité.*