Développement: Théorème de Bernstein

Adrien Fontaine

24 décembre 2012

Référence : Zuily-Queffelec, théorème II.3p518

Théorème 1 (*Théorème de Bernstein*)

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ une fonction continue, ω son module de continuité, i.e $\omega(h) = \sup\{|f(u) - f(v)|; |u-v| \leq h\}$. Pour $n \geq 1$, on considère le polynôme $B_n(f,x) = B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f(\frac{k}{n})$, le n-ième polynôme de Bernstein de f. Alors :

1. *B_n converge uniformément vers f sur $[0,1]$.*
2. *Plus précisément, on a $\|f - B_n\|_\infty \leq C\omega(\frac{1}{\sqrt{n}})$, où C est une constante numérique.*
3. *L'estimation de 2) est optimale : il existe une fonction lipschitzienne f pour laquelle $\|f - B_n\|_\infty \geq \frac{\delta}{\sqrt{n}}$, où δ est une constante numérique.*

Démonstration : 1. Soit $x \in [0,1]$ et soit (X_n) une suite de variables aléatoires et identiquement distribuées de loi $\mathcal{B}(x)$.
Alors, $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k \sim \mathcal{B}(n,x)$. L'observation clé de Bernstein est que

$$\mathbb{E}[f(\frac{S_n}{n})] = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f(\frac{k}{n}) = B_n(x)$$

est un polynôme en le paramètre x qui devrait être proche de $\mathbb{E}[f(x)] = f(x)$ puisque $\frac{S_n}{n}$ tend en probabilité vers x. Plus précisément, désignons par $\|.\|_\infty$ la norme sup sur $[0,1]$ et fixons $\delta \in]0,1[$. On a :

$$\begin{aligned} |f(x) - B_n(x)| &= |\mathbb{E}[f(x) - f(\frac{S_n}{n})] \\ &\leq \mathbb{E}[|f(x) - f(\frac{S_n}{n})|] \end{aligned}$$

Afin de montrer que cette espérance tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, on désire utiliser la loi faible des grand nombres. On a :

$$\mathbb{P}(|x - \frac{S_n}{n}| > \delta) \to 0 \text{ quand } n \to +\infty$$

Et par définition du module de continuité, $|f(x) - f(\frac{S_n}{n})| \leq \omega(\delta)$ si $|x - \frac{S_n}{n}| \leq \delta$.
On découpe donc cette espérance en 2 :

$$\mathbb{E}[|f(x) - f(\frac{S_n}{n})|] = \mathbb{E}[|f(x) - f(\frac{S_n}{n})|1_{|x-\frac{S_n}{n}|\leq\delta}] + \mathbb{E}[|f(x) - f(\frac{S_n}{n})|1_{|x-\frac{S_n}{n}|>\delta}]$$

D'où,

$$\begin{aligned}|f(x) - B_n(x)| &\leq \mathbb{E}[\omega(\delta)1_{|x-\frac{S_n}{n}|\leq\delta}] + 2\|f\|_\infty \mathbb{E}[1_{|x-\frac{S_n}{n}>\delta}] \\ &\leq \omega(\delta) + 2\|f\|_\infty \mathbb{P}(|x - \frac{S_n}{n}| \geq \delta)\end{aligned}$$

Afin d'avoir une majoration indépendante de x, on utilise l'inégalité de Chebychev, plutôt que d'utiliser directement la loi faible des grands nombres. On a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|x - \frac{S_n}{n}| > \delta) &\leq \frac{Var(x - \frac{S_n}{n}}{\delta^2} \\ &= \frac{Var(S_n)}{n^2\delta^2} \\ &= \frac{Var(X_1)}{n\delta^2} \\ &= \frac{x(1-x)}{n\delta^2} \\ &\leq \frac{1}{4n\delta^2}\end{aligned}$$

Donc,

$$\|f - B_n\|_\infty \leq \omega(\delta) + \frac{\|f\|_\infty}{2n\delta^2}$$

D'où,

$$\limsup_{n\to+\infty} \|f - B_n\|_\infty \leq \omega(\delta)$$

Or, $\omega(\delta) \to 0$ quand $\delta \to 0$. D'où,

$$\|f - B_n\|_\infty \to 0$$

2. On a besoin du lemme suivant :
   Lemme 1

$$\forall h \in [0,1], \forall \lambda \ tq \ \lambda h \in [0,1], \omega(\lambda h) \leq (\lambda + 1)\omega(h)$$

Démonstration : – Si $\lambda \leq 1$, $|u - v| \leq \lambda h \Rightarrow |u - v| \leq h \Rightarrow |f(u) - f(v)| \leq \omega(h) \Rightarrow \omega(\lambda h) \leq \omega(h) \leq (\lambda+1)\omega(h)$

– Si $\lambda \geq 1$ et $u < v$ tels que $|u - v| \leq \lambda h$.
  Posons $u_0 = u$ et pour $k \geq 1$,

$$u_k = \min(v, u_{k-1} + h)$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n-1} < v$ et $u_{n-1} + h \geq v$ (n existe car sinon, $\forall k, u_k = u + kh \to +\infty$ et $u_k < v$, absurde). Alors on a $u_n = v$. Donc,

$$\begin{aligned}|f(u) - f(v)| &\leq \sum_{k=0}^{n-1} |f(u_{k+1}) - f(u_k)| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \omega(h) \text{ car } |u_{k+1} - u_k| \leq h \\ &= nh\end{aligned}$$

Or, $u_{n-1} = (n-1)h + u < v$. Donc,

$$n - 1 < \frac{v-u}{h} \leq \frac{\lambda h}{h} = h$$

Donc, $n \leq \lambda + 1$. D'où,

$$\forall u, v \text{ tq } |u - v| \leq \lambda h, |f(u) - f(v)| \leq (\lambda + 1)\omega(h)$$

Donc, $\omega(\lambda h) \leq (\lambda + 1)\omega(h)$. ■

Revenons à la preuve du théorème. Posons $\lambda = \sqrt{n}|x - \frac{S_n}{n}|$ et $h = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Alors, λ et h vérifient les hypothèses du lemme. Donc,

$$\omega(|x - \frac{S_n}{n}|) \leq (\sqrt{n}|s - \frac{S_n}{n}| + 1)\omega(\frac{1}{\sqrt{n}})$$

Donc,

$$\begin{aligned}
|f(x) - B_n(x)| &\leq \mathbb{E}[|f(x) - f(\frac{S_n}{n})|] \\
&\leq \mathbb{E}[\omega(|x - \frac{S_n}{n}|)] \\
&\leq \omega(\frac{1}{\sqrt{n}}) \left(\sqrt{n}\mathbb{E}[|x - \frac{S_n}{n}|] + 1 \right) \\
&\leq \omega(\frac{1}{\sqrt{n}}) \left(\sqrt{n} \left(\mathbb{E}[(x - \frac{S_n}{n})^2] \right)^{1/2} + 1 \right) \text{ par Jensen pour } x \mapsto x^2 \\
&\leq \omega(\frac{1}{\sqrt{n}}) \left(\sqrt{n} Var(x - \frac{S_n}{n})^{1/2} + 1 \right) \text{ car } \mathbb{E}[x - \frac{S_n}{n}] = 0 \\
&\leq \omega(\frac{1}{\sqrt{n}}) \left(\sqrt{n} \left(\frac{Var(X_1)}{n} \right)^{1/2} + 1 \right) \\
&\leq \omega(\frac{1}{\sqrt{n}}) \left(\sqrt{x(1-x)} + 1 \right)
\end{aligned}$$

Donc,

$$\|f - B_n\|_\infty \leq \frac{3}{2}\omega(\frac{1}{\sqrt{n}})$$

3. Prenons $f(x) = |x - \frac{1}{2}|$. Alors, f est 1-Lipschitzienne et donc $\forall h \in [0, 1], \omega(h) \leq h$. Cependant,
$$\|f - B_n\|_\infty \geq |f(\frac{1}{2}) - B_n(\frac{1}{2})| = |B_n(\frac{1}{2})| = |\mathbb{E}[f(\frac{S_n}{n})]| = |\mathbb{E}[|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}|]|$$
avec $S_n = X_1 + ... + X_n$, $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ i.i.d de loi $\mathcal{B}(\frac{1}{2})$.
Donc, $2S_n - n = \varepsilon_1 + ... + \varepsilon_n$ avec $\varepsilon_i = 2X_i - 1 \sim \frac{1}{2}\delta_1 + \frac{1}{2}\delta_{-1}$.
Donc,
$$\|f - B_n\|_\infty \geq \frac{1}{2n}\mathbb{E}[|\varepsilon_1 + ... + \varepsilon_n|] = \frac{\|\varepsilon_1 + ... + \varepsilon_n\|_1}{2n}$$
On conclut grâce à l'inégalité de Khintchine :

Lemme 2

$$\|\varepsilon_1 + ... + \varepsilon_n\|_1 \geq \frac{1}{\sqrt{e}}\|\varepsilon_1 + ... + \varepsilon_n\|_2$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
\|f - B_n\|_\infty &\geq \frac{1}{2n\sqrt{e}} \left(Var(\varepsilon_1 + ... + \varepsilon_n) + \mathbb{E}[\varepsilon_1 + ... + \varepsilon_n]\right)^{1/2} \\
&= \frac{1}{2n\sqrt{e}} \sqrt{n} \\
&= \frac{1}{2e} \frac{1}{\sqrt{n}} \\
&\geq \frac{1}{2\sqrt{e}} \omega(\frac{1}{\sqrt{n}})
\end{aligned}$$

■

Remarque 1

On trouvera une preuve de l'inégalité de Khintchine dans Zuily-Queffelec p248-249.
En présentation du développement, on a pas le temps de présenter le 3), on pourra simplement le mentionner et dire que si le jury veut une preuve, on peut la donner.