Développement: Théorème de Browder-Göhde

Adrien Fontaine

30 avril 2014

Référence : F.Testard, Analyse mathématique : La maitrise de l'implicite

Théorème 1

Soit H un espace de Hilbert, C un convexe non vide fermé et borné de H. On suppose que $f : C \to C$ est une application 1-lipschitzienne. Alors, f admet un point fixe.

Démonstration : Désignons par $\delta(C) = \sup_{x,y\in C} \|x - y\|$ le diamètre de C.
La preuve se construit en 4 étapes.

1. On montre que pour tout $x, y \in C$, si $a = \frac{x+y}{2}$ et $\alpha = \max(\|x - f(x)\|, \|y - f(y)\|)$, alors

$$\|a - f(a)\| \leq 2\sqrt{\alpha\delta(C)}$$

2. On pose $C_n = \{x \in C, \|x - f(x)\| \leq \frac{\delta(C)}{n}$. On montre que (C_n) est une famille décroissante de parties fermées non vides de C.

3. On introduit une nouvelle famille (B_n) décroissante de parties fermées non vides de C, telle que pour tout n, $B_n =\subset C_n$, et dont le diamètre tend vers 0.

4. Conclusion.

Commençons donc la preuve du théorème de Browder-Göhde.

1. On reprend les notations de 1).
   Par l'inégalité triangulaire, on a :

$$\|x - y\| \leq \|x - \frac{a + f(a)}{2}\| + \|y - \frac{a + f(a)}{2}$$

Donc, quitte à échanger les rôles de x et y, on peut supposer que

$$\|x - \frac{a + f(a)}{2}\| \geq \frac{\|x - y\|}{2}$$

Pour majorer la quantité $\|a - f(a)\|$, on va utiliser l'identité du parallélogramme (c'est ici que l'on utilise le fait que l'on est que la norme soit issue d'un produit scalaire). On a :

$$\begin{aligned}\|a - f(a)\|^2 &= \|(x - f(a)) - (x - a)\|^2 \\ &= 2\left(\|x - f(a)\|^2 + \|x - a\|^2\right) - \|2x - (a + f(a))\|^2\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}\|x-f(a)\| &\leq \|x-f(x)\|+\|f(x)-f(a)\| \\ &\leq \alpha+\|x-a\| \text{ car } f \text{ est 1-lipschtzienne} \\ &\leq \alpha+\frac{\|x-y\|}{2}\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\|a-f(a)\|^2 &\leq 2\left(\left(\alpha+\frac{\|x-y\|}{2}\right)^2+\frac{\|x-y\|^2}{4}\right)-4\|x-\frac{a+f(a)}{2}\|^2 \\ &\leq 2\left(\left(\alpha+\frac{\|x-y\|}{2}\right)^2+\frac{\|x-y\|^2}{4}\right)-4\frac{\|x-y\|^2}{4} \\ &\leq 2\alpha^2+2\alpha\|x-y\|\end{aligned}$$

Or, $\alpha=\max(\|x-f(x)\|,\|y-f(y)\|)\leq\delta(C)$. D'où,

$$\|a-f(a)\|^2\leq 4\alpha\delta(C)$$

i.e

$$\|a-f(a)\|\leq 2\sqrt{\alpha\delta(C)}$$

2. Intéressons nous maintenant à notre famille (C_n). Commençons par montrer qu'elle est non vide. Pour cela, on fixe $c_0\in C$, et on pose pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} f_n \quad : C \quad &\to \quad C \\ x \mapsto \quad & \tfrac{1}{n}c_0+(1-\tfrac{1}{n})f(x)\end{aligned}$$

$f_n(x)$ est une combinaison convexe de points de C, qui est un ensemble convexe, donc f_n est bien à valeurs dans C. De plus, pour tout $x,y\in C$,

$$\begin{aligned}\|f_n(x)-f_n(y)\| &= \left(1-\frac{1}{n}\right)\|f(x)-f(y)\| \\ &\leq \underbrace{\left(1-\frac{1}{n}\right)}_{<1}\|x-y\|\end{aligned}$$

Donc, f_n est contractante. De plus, C est fermé dans H complet, donc C est complet. Donc, le théorème de point fixe de Picard s'applique et il existe un unique point fixe $x_n\in C$ de f_n. Montrons que $x_n\in C_n$. On a :

$$\begin{aligned}\|x_n-f(x_n)\| &= \|f_n(x_n)-f(x_n)\| \\ &= \|\frac{1}{n}c_0+\left(1-\frac{1}{n}\right)f(x_n)-f(x_n)\| \\ &= \frac{1}{n}\|c_0-f(x_n)\| \\ &\leq \frac{\delta(C)}{n}\end{aligned}$$

Donc, C_n est non vide. De plus, (C_n) est décroissante. En effet, si $x\in C_{n+1}$, alors

$$\|x-f(x)\|\leq\frac{\delta(C)}{n+1}\leq\frac{\delta(C)}{n}$$

donc $x \in C_n$. D'où, $C_{n+1} \subset C_n$.
Enfin, C_n est fermé puisque $C_n = \Phi^{-1}\left([0, \frac{\delta(C)}{n}]\right)$ avec

$$\begin{array}{cccc} \Phi & : & C & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \|x - f(x)\| \end{array}$$

et Φ est continue comme composée d'applications continue ($\|.\|$ est continue et f est continue car lipschitzienne). On a évidemment envie d'appliquer le fait qu'une intersection décroissante de fermés non vide dans un espace complet, dont le diamètre tend vers 0, est réduite à un point. Le problème est que la diamètre de C_n n'a aucune raison de tendre vers 0. Pour palier à ce problème, on introduit des nouveaux ensembles B_n fermés non vides, décroissants, dont la diamètre tend cette fois vers 0, et qui sont contenus dans les C_n. L'idée pour construire les B_n est d'intersecter C_n avec une boule fermée judicieusement choisi.

3. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $m_n = \inf\{x \in C_n, \|x - c_0\|\}$. Puisque $C_{n+1} \subset C_n$, on a (m_n) qui est croissante. De plus, $(m_n) \leq \delta(C)$. Donc, (m_n) est une suite croissante majorée, donc convergente. Notons m sa limite. On pose alors

$$B_n = C_{4n^2} \cap \overline{B}(c_0, m + \frac{1}{n})$$

(le choix de prendre C_{4n^2} et non C_n se justifiera au moment de calculer le diamètre des B_n).
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, B_n est l'intersection de 2 fermés de C donc c'est un fermé de C. De plus, (B_n) est décroissante puisque les C_n décroissent et que le rayon des boules décroit. Montrons que B_n est non vide. Par définition de l'inf, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $x \in C_{4n^2}$ tel que

$$\|x - c_0\| \leq m_{4n^2} + \frac{1}{n} \leq m + \frac{1}{n}$$

Donc, B_n est non vide.
Il nous reste à montrer que le diamètre de B_n tend vers 0.
Soient $x, y \in B_n$. Par l'identité du parallélogramme,

$$\begin{aligned} \|x - y\|^2 &= \|(c_0 - y) - (c_0 - x)\|^2 \\ &= 2\left(\|c_0 - x\|^2 + \|c_0 - y\|^2\right) - \|2c_0 - (x + y)\|^2 \\ &\leq 4\left(\left(m + \frac{1}{n}\right)^2 - \|c_0 - \frac{x + y}{2}\|^2\right) \end{aligned}$$

Pour majorer $\|c_0 - \frac{x+y}{2}\|$, il nous suffit de montrer que $a = \frac{x+y}{2} \in C_n$.
D'après le 1), on a $\|a - f(a)\| \leq 2\sqrt{\alpha\delta(C)}$.
Or, $\alpha = \max(\|x - f(x)\|, \|y - f(y)\|) \leq \frac{\delta(C)}{4n^2}$ car $x, y \in C_{4n^2}$.
Donc, $\|a - f(a)\| \leq \frac{\delta(C)}{n}$, i.e $a \in C_n$.
Ainsi,

$$\|x - y\|^2 \leq 4\left(\left(m + \frac{1}{n}\right)^2 - m_n^2\right)$$

Donc,

$$\delta(B_n) \leq 2\sqrt{\left(m + \frac{1}{n}\right)^2 - m_n^2}$$

Et donc, $\delta(B_n)$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$.

4. Ainsi, il existe $x_0 \in C$ tel que $\cap_{n\in\mathbb{N}} B_n = \{x_0\}$. Comme $B_n \subset C_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $x_0 \in \cap_{n\in\mathbb{N}} C_n$, i.e $x_0 = f(x_0)$.
Ainsi, f admet un point fixe. ■

Remarque 1

On a pas forcément unicité du point fixe de f, et cela vient justement du fait que le diamètre des C_n n'a aucune raison de tendre vers 0. En effet, l'intersection des C_n correspond exactement à l'ensemble des points fixes de f.

Remarque 2

Le théorème de Browder-Göhde reste vrai dans un espace de Banach uniformément convexe (ce sont des espaces pour lesquels la boule unité est suffisamment "ronde", les espaces de Hilbert sont uniformément convexes, les espaces L^p sont un autre exemple moins trivial). La preuve n'est pas beaucoup plus difficile mais plus longue (trop longue pour tenir en développement) : il faut notamment obtenir une généralisation du théorème de projection sur un convexe fermé dans les espaces de Banach uniformément convexes. On trouve la preuve à l'exercice 6.19p341 du livre de Testard.