Développement: Théorème de Burnside

Adrien Fontaine

27 novembre 2012

Référence : Oraux X-ENS, Algèbre 2, exercice 3.6p171

Théorème 1 (***Théorème de Burnside***)

Un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$ d'exposant fini (c'est à dire qu'il existe un entier N tel que $A^N = I$ pour toute matrice A du groupe) est fini.

Pour démontrer ce théorème, on va avoir besoin de la caractérisation classique des matrices nilpotente suivante :

Lemme 1

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. On a :

$$A \text{ est nilpotente } \iff \forall k \geq 1, Tr(A^k) = 0$$

Démonstration : Le sens direct est évident en trigonalisant notre matrice A.

Réciproquement, supposons que pour tout $k \geq 1$, $Tr(A^k) = 0$. Par l'absurde, si A n'est pas nilpotente alors soient $\lambda_1, ..., \lambda_r$ les valeurs propres distinctes non nulles de A, de multiplicités respectives $n_1, ..., n_r$. Alors, en trigonalisant A, l'hypothèse sur les traces nous donne ;

$$\forall k \geq 1, n_1\lambda_1^k + ... + n_r\lambda_r^k = 0$$

Le vecteur ${}^t(n_1, ..., n_r)$ est donc une solution non nulle du système linéaire :

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & ... & \lambda_r \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & ... & \lambda_r^2 \\ \vdots & & & \vdots \\ \lambda_1^r & \lambda_2^r & ... & \lambda_r^r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{bmatrix} = 0$$

Or, le déterminant de la matrice du système est non nul (c'est un Vandermonde et les λ_i sont tous distincts). D'où, une contradiction. ■

On est désormais en mesure de démontrer le théorème de Burnside.

Démonstration du théorème de Burnside : Soit N l'exposant de G.

Soit $(M_i)_{1 \leq i \leq m}$ une base de $Vect(G)$ formée d'éléments de G.

Soit

$$\begin{array}{rcccc} f & : & G & \to & \mathbb{C}^m \\ & & A & \mapsto & (Tr(AM_i))_{1 \leq i \leq m} \end{array}$$

Montrons que f est injective.

Soient $A, B \in G$ telles que $Tr(AM_i) = Tr(BM_i)$ pour tout $1 \leq i \leq m$. Alors, par linéarité, on a :

$$\forall M \in G, Tr(AM) = Tr(BM)$$

Soit $D = AB^{-1} \in G$. Alors on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}, Tr(D^{k+1}) = Tr(A\underbrace{B^{-1}D^k}_{\in G}) = Tr(BB^{-1}D^k) = Tr(D^k)$$

D'où par récurrence immédiate :

$$\forall k \in \mathbb{N}, Tr(D^k) = Tr(I_n) = n$$

D et I_n commutent donc on peut appliquer le binôme de Newton, et pour tout $k \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned} Tr((D - I_n)^k) &= \sum_{j=0}^{k} \binom{j}{k} (-1)^j Tr(D^{k-j}) \\ &= \sum_{j=0}^{k} \binom{j}{k} (-1)^j n \\ &= n(1-1)^k \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc, d'après le lemme démontré précédemment, $D - I_n$ est nilpotente. Par ailleurs, G étant d'exposant fini N, toutes les matrices de G sont annulées par $X^N - 1$ qui est scindé à racines simples, donc toutes les matrices de G sont diagonalisables. En particulier, D est diagonalisable et donc, $D - I_n$ est diagonalisable.
Par conséquent, $D - I_n = 0$, i.e $D = I_n$. D'où l'injectivité.
Il reste à montrer que l'image de f est finie.
Or, $Im(f) \subset X^m$ où $X = \{Tr(A), a \in G\}$.
Et on a vu que les éléments de G sont annulés par $X^N - 1$, donc les valeurs propres des éléments de G sont dans l'ensemble des racines N-ièmes de l'unité qui sont en nombre fini. Donc X est fini.
D'où G fini. ■

Remarque 1

La démonstration nous donne par ailleurs une majoration sur l'ordre de G. En effet, on a :
- $|G| \leq |X|^m$
- $m \leq n^2$
- $|X| \leq N^n$

Do'ù, $|G| \leq N^{n^3}$.