Développement: Théorème de Cauchy-Lipschitz global

Adrien Fontaine

5 novembre 2012

Référence : Rouvière, exercice 60p180

Théorème 1 (***Théorème de Cauchy-Lipschitz global***)

L'espace $\mathbb{R}^m$ est muni d'une norme $\|.\|$. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ une application continue supposée globalement lipschitzienne en y au sens suivant : pour tout intrevalle compact $K \subset I$, il existe $k > 0$ tel que pour tous $t \in K$, $y, z \in \mathbb{R}^m$,

$$\|f(t,y) - f(t,z)\| \leq k\|y - z\|$$

Alors, le système différentiel

$$y' = f(t,y), y(t_0) = x$$

avec $t_0 \in I$ et $x \in \mathbb{R}^m$ donnés, admet une solution unique $t \mapsto y(t)$ qui est définie sur I tout entier.

En particulier, le résultat précédent s'applique notamment à tous les systèmes différentiels linéaires

$$y' = A(t)y + b(t)$$

où la matrice $A(t)$ et le vecteur $b(t)$ sont continus en t sur I.

Démonstration : On suppose dans un premier temps que I est compact :

On note $E = \{y : I \to \mathbb{R}^m, \text{continues}\}$.

Pour $y \in E$, $t \in I$, $F(y)(t) = x + \int_{t_0}^t f(x, y(s))ds$.

Si y est solution du système différentiel sur I, $t \mapsto y(t)$ est dérivable sur I (donc continue) et $y'(t) = f(t, y(t))$ pour $t \in I$ et $y(t_0) = x$. Comme f est continue, y' est aussi continue, d'où en intégrant

$$y(t) = \int_{t_0}^t f(s, y(s))ds$$

i.e $F(y) = y$.

Réciproquement, si y est continue sur I et $F(y) = y$ alors y est dérivable et

$$\begin{cases} y'(t) &= f(t, y(t)) \\ y(t_0) &= x \end{cases}$$

Le problème équivaut donc à la recherche d'un point fixe $y \in E$ pour l'application F.

Soit k la constante de Lipschitz associée à I et l la longueur de I. On munit E de la norme

$$\|y\|_k = \max_{t \in I} e^{-k|t-t_0|}\|y(t)\|$$

On a :

$$e^{-kl}\|y\|_\infty \leq \|y\|_k \leq \|y\|_\infty$$

L'espace E normé complet pour la norme $\|.\|_\infty$ (car I est compact) l'est donc également pour la norme $\|.\|_k$.
Comme f est continue, F applique E dans lui même . Pour appliquer le théorème de point fixe de Picard, il reste à montrer que F est contractante pour la norme $\|.\|_k$.
Pour $y, z \in E$, on a pour tout $t \in I$, $t \geq t_0$:

$$F(y)(t) - F(z)(t) = \int_{t_0}^{t} (f(s, y(s)) - f(s, z(s)))ds$$

D'où,

$$\begin{aligned}
&e^{-k(t-t_0)} \|F(y)(t) - F(z)(t)\| \\
&\leq e^{-k(t-t_0)} \int_{t_0}^{t} \|f(s, y(s)) - f(s, z(s))\| ds \\
&\leq e^{-k(t-t_0)} \int_{t_0}^{t} k\|y(s) - z(s)\| ds \\
&\leq e^{-k(t-t_0)} \int_{t_0}^{t} k e^{k(s-t_0)} \|y - z\|_k ds \\
&\leq (1 - e^{-k|t-t_0|}) \|y - z\|_k
\end{aligned}$$

Pour $t \in I$ et $t \leq t_0$ on obtient de même, en prenant soin d'écrire $\int_t^{t_0}$ au lieu de $\int_{t_0}^t$ dans les majorations,

$$e^{k(t-t_0)} \|F(y)(t) - F(z)(t)\| \leq (1 - e^{-k|t-t_0|}) \|y - z\|_k$$

D'où, pour tout $t \in I$, on a :

$$e^{-k|t-t_0|} \|F(y)(t) - F(z)(t)\| \leq (1 - e^{-k|t-t_0|}) \|y - z\|_k$$

d'où en passant au max sur I,

$$\|F(y) - F(z)\|_k \leq \underbrace{(1 - e^{-kl})}_{<1} \|y - z\|_k$$

Ainsi, F est contractante sur E muni de la norme $\|.\|_k$ et par le théorème du point fixe, le problème posé admet une solution unique.
<u>Cas général :</u>
Un intervalle quelconque I peut s'écrire $I = \cup_j I_j$ réunion d'une suite croissante d'intervalles compacts contenant tous le point t_0 donné ($]a, b[= \cup[a + 1/n, b - 1/n]$ qui contient le point t_0 pour n assez grand).
Soit y_j la solution (donnée par l'étude du premier cas) du problème sur I_j :

$$y_j'(t) = f(t, y_j(t)), t \in I_j, y_j(t_0) = x$$

Si y est la solution du problème sur I, la restriction de y à I_j coïncide nécessairement avec y_j par unicité sur I_j. Inversement, les y_j se raccordent : la fonction

$$y(t) = y_j(t) \text{ pour tout } j \text{ tel que } t \in I_j$$

est bien définie (encore l'unicité sur I_j !) et donne une solution sur I. ■