Développement: Théorème de Grothendieck

Adrien Fontaine

5 novembre 2013

Référence : Walter Rudin, Analyse fonctionnelle, Partie I chapitre 5

Théorème 1 (*de Grothendieck*)

On suppose que $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré de mesure finie non nulle et soit $p \in]1, +\infty[$. Tout sous espace fermé de $L^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ inclus dans $L^\infty_{\mathbb{K}}(\mu)$ est de dimension finie.

Idée de la preuve : On va d'abord montrer que, sur F, les normes $\|.\|_p$ et $\|.\|_\infty$ sont équivalentes (ce qui ne devrait pas étonner, étant donné qu'on souhaite prouver que F est de dimension finie), on pourra ensuite ramener le cas général au cas $p = 2$ (en injectant continûment $(F, \|.\|_2)$ dans $L^\infty_{\mathbb{K}}(\mu)$). Afin de conclure, on utilisera le caractère hilbertien de $L^2_{\mathbb{K}}(\mu)$ pour montrer qu'on ne peut pas avoir de trop grande famille orthonormée dans F.

Démonstration : On pose pour simplifier $L^2 = L^2_{\mathbb{K}}(\mu)$, $L^p = L^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ et $L^\infty = L^\infty_{\mathbb{K}}(\mu)$. Soit F un sous-espace fermé de L^p inclus dans L^∞. Comme μ est finie, on a les inclusions suivantes, qu'on utilisera de manière permanente :

$$F \subset L^\infty \subset L^2 \text{ et } F \subset L^\infty \subset L^p$$

Commençons par montrer l'équivalence des normes $\|.\|_p$ et $\|.\|_\infty$ sur F. Pour tout $f \in L^\infty$, on a $\|f\|_p \leq \mu(X)^{1/p}\|f\|_\infty$, donc l'injection naturelle de L^∞ dans L^p est continue, et l'image réciproque de F, à savoir F lui même car F est dans L^∞, sera un fermé de L^∞. Or, L^∞ est un espace de Banach. Donc, $(F, \|.\|_\infty)$ est un espace de Banach. Ainsi, comme $(F, \|.\|_p)$ est également un espace de Banach (en tant que fermé de L^p qui est bien un espace de Banach d'après le théorème de Riesz-Fischer), le théorème d'isomorphisme de Banach assure que la bijection naturelle de $(F, \|.\|_\infty)$ dans $(F, \|.\|_p)$ est un homéomorphisme. Son inverse sera donc une application linéaire continue, ce qui assure l'existence de $\alpha > 0$ tel que, pour tout $f \in F$, on ait : $\|f\|_\infty \leq \|f\|_p$. En définitive, on a, pour tout $f \in F$:

$$\frac{1}{\mu(X)}\|f\|_p \leq \|f\|_\infty \leq \alpha\|f\|_p$$

ce qui assure bien l'équivalence des normes $\|.\|_p$ et $\|.\|_\infty$ sur F.

On veut maintenant montrer que l'injection naturelle de $(F, \|.\|_2)$ dans L^p est continue. Faisons une disjonction des cas :

- Si $p < 2$, alors l'inégalité de Hölder assure que, pour tout $f \in F$, $\|f\|_p \leq \mu(X)^{1-p/2}\|f\|_2$.
- Si $p \geq 2$, on a pour tout $f \in F$, $|f|^p = |f|^2|f|^{p-2}$ et donc $\|f\|_p^p \leq \|f\|_\infty^{p-2}\|f\|_2^2$. Ainsi, l'égalité d'équivalence des normes assure que, pour tout $f \in F$, on ait

$$\|f\|_p \leq \alpha^{\frac{p-2}{p}}\|f\|^2$$

L'injection naturelle de $(F, \|.\|_2)$ dans L^p est donc continue, mais comme celle de $(F, \|.\|_p)$ dans L^∞ est également continue, l'injection de $(F, \|.\|_2)$ dans L^∞ sera également continue, ce qui assure l'existence de $\beta > 0$ tel que, pour tout $f \in F$:

$$\|f\|_\infty \leq \beta\|f\|_2$$

On va enfin montrer que les familles orthonormées de F pour le produit scalaire usuel de L^2 ne peuvent être de cardinal trop grand. Soient $f_1, ..., f_n$ de F de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$ et Q une partie dénombrable dense de $\mathbb{K}^n$. Considérons alors l'application

$$\begin{array}{cccc} \Phi & : & \mathbb{K}^n & \rightarrow & F \\ & & (\lambda_1, ..., \lambda_n) & \mapsto \lambda_1 f_1 + ... + \lambda_n f_n \end{array}$$

Le théorème de Pythagore et l'inégalité de continuité de l'injection assurent que, en notant $|.|_2$ la norme euclidienne sur $\mathbb{K}^n$, on a pour tout $\Lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in Q$:

$$\|\Phi(\lambda)\|_\infty \leq \beta \|\Phi(\lambda)\|_2 = \beta \sqrt{|\lambda_1|^2 + ... + |\lambda_n|^2} = \beta |\Lambda|_2$$

Comme Q est dénombrable, il existe $\Omega \in \mathcal{A}$ de mesure pleine tel que, pour tout $x \in \Omega$, et pour tout $\Lambda \in Q$, $|\Phi(\Lambda)(x)| \leq \beta |\lambda|_2$. Soit $x \in \Omega$. Comme $(\Lambda \mapsto \Phi(\Lambda)(x))$ est continue sur $\mathbb{K}^n$ et comme Q est dense dans $\mathbb{K}^n$, on aura pour tout $\Lambda \in \mathbb{K}^n$, $|\Phi(\Lambda)(x)| \leq \beta |\Lambda|_2$.
Soit $x \in \Omega$, prenons pour tout $1 \leq i \leq n$, $\lambda_i = \overline{f_i(x)}$, on trouve

$$|\Phi(\Lambda)(x)| = |f_1(x)|^2 + ... + |f_n(x)|^2 \leq \beta \sqrt{|f_1(x)|^2 + ... + |f_n(x)|^2}$$

et donc $|f_1(x)|^2 + ... + |f_n(x)|^2 \leq \beta^2$, ce qui entraîne, par intégration (car Ω est de mesure pleine), $n \leq \beta^2 \mu(\Omega) = \beta^2 \mu(X)$. Comme toute famille libre de L^2 est "orthonormalisable", il ne pourra pas y avoir de famille libre de F de cardinal supérieur à $\beta^2 \mu(X)$.
Ainsi, F est de dimension finie et $dim(F) \leq \beta^2 \mu(X)$. ■

Que dire de la borne dimensionnelle trouvée ? Avec les notations précédentes, $\beta = \sup_{f \in F, \|f\|_2 = 1} \|f\|_\infty$. La borne dimensionnelle dépend donc fortement de F, et on peut trouver des sous-espaces F de dimension arbitrairement grandes (prendre par exemple l'ensemble des polynômes trigonométriques de degré fixé).
Notons par ailleurs que $\beta^2 \mu(X)$ n'est pas forcément une bonne borne. Ainsi, en prenant $n \in \mathbb{N}$, $X = [0, 1]$ et $\mathcal{A} = \mathcal{B}([0, 1])$, μ la mesure de Lebesgue, et F l'espace engendré par la fonction caractéristique de $[0, 2^{-n}]$, on trouve $dim(F) = 1$ et $\beta^2 \mu(X) = 2^n$. La borne dimensionnelle $\beta^2 \mu(X)$ peut donc être très mauvaise, même dans le cas bête d'une droite.
L'hypothèse de fermeture est fondamentale. L^∞ est bien un sous-espace de L^p, inclus dans L^∞ et est de dimension infinie.
L'hypothèse d'inclusion dans L^∞ est également fondamentale, et ne peut pas être remplacée par une inclusion dans un L^q avec $p < q < +\infty$. Rudin construit, juste après avoir énoncé ce théorème, un sous-espace fermé de L^1, qui vit dans L^4, et qui est de dimension infinie.