Développement: Théorème de Hadamard-Lévy

Adrien Fontaine

8 octobre 2013

Théorème 1 (*Hadamard-Lévy*)

Soit f une application de classe C^1 de $\mathbb{R}^n$ dans lui même. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. *f est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$.*
2. *f est propre et, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, la matrice jacobienne $Df(x)$ est inversible.*

Une application est dite propre si l'image réciproque de tout compact est compacte. Lorsque $\mathbb{R}^n$ est l'espace de départ et d'arrivée, cela revient à dire que $\| f(x) \|$ tend vers l'infini quand $\| x \|$ tend vers l'infini.

Démonstration : La preuve de ce résultat n'est pas simple, cependant si f est de classe C^2, il y a une preuve abordable que l'on présente ici. On suppose donc désormais que f est de classe C^2.

– 1) $\Rightarrow$ 2) : f^{-1} étant continue, elle envoie un compact sur un compact donc f est propre. Ensuite, comme $f^{-1} \circ f = Id$, on a $d(f^{-1})(f(x)) \circ df(x) = Id$, donc df est inversible en tout point.

– 2) $\Rightarrow$ 1) :

1. Montrons que f est surjective.
   Pour cela on montre que $f(\mathbb{R}^n)$ est un ouvert/fermé de $\mathbb{R}^n$ et donc que $f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$ par connexité de $\mathbb{R}^n$.
   Soit $y_0 \in f(\mathbb{R}^n)$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(x_0) = y_0$. D'après le théorème d'inversion locale, f est un difféomorphisme d'un voisinage V de x_0 sur un voisinage W de y_0, alors $W = f(V) \subset f(\mathbb{R}^n)$, donc $f(\mathbb{R}^n$ est ouvert.
   Soit $(y_k)_{k\in\mathbb{N}} \in f(\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$ telle que $y_k \to y \in \mathbb{R}^n$ quand $k \to \infty$. Posons $K = \{y_k, k \in \mathbb{N}\} \cup \{y\}$ qui est un compact de $\mathbb{R}^n$. Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tel que $f(x_k) = y_k$ pour tout k, on a $x_k \in f^{-1}(K)$ qui est un compact puisque f est propre. Il existe donc une sous-suite convergente $x_{k_i} \to x$ dans $\mathbb{R}^n$ quand $i \to \infty$. Alors par continuité de f, $y_{k_i} = f(x_{k_i}) \to f(x) \in f(\mathbb{R}^n)$ d'où par unicité de la limite $y = f(x) \in f(\mathbb{R}^n)$, ce qui montre que $f(\mathbb{R}^n)$ est fermé.
2. Montrons que f est injective.
   C'est ici que l'on va utiliser l'hypothèse $f \in C^2$.
   Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$. On considère la fonction $g(x) = f(x) - f(x_0)$. Elle vérifie les deux conditions de 2) à savoir g propre et le déterminant du jacobien est partout non nul. Il nous faut montrer que l'ensemble $S = \{x/g(x) = 0\}$ est réduit à un point $\{x_0\}$.
   (a) S a un nombre fini d'éléments.
   En effet, S est compact car g est propre ($S = g^{-1}(\{0\})$). Si S avait un nombre infini d'éléments (x_k), il y aurait dans S un point d'accumulation q. Comme $| Jac_q(g) | \neq 0$, il existe un voisinage V de q tel que g soit un difféomorphisme de V

sur $h(V)$. En particulier, g est injective. Or, dans V, il y a au moins un $x_k \neq q$ et on a $g(x_k) = g(q) = 0$ ce qui contredit l'injectivité de g.

(b) Notons $S = \{p_1, ..., p_N\}$. On va montrer que $N = 1$.
On considère la fonction

$$F(x) = [dg(x)]^{-1}g(x)$$

Cette fonction est bien définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$ par hypothèse sur f. On introduit alors le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) & = -F(x(t)) \\ x(0) & = q \end{cases}$$

où $q \in \mathbb{R}^n$. On appelle alors trajectoire issue de q une solution du problème de Cauchy ci-dessus. Puisque $F \in C^1$, ce problème admet une solution maximale définie sur $[0, T^*[$. Soit x une telle solution.
Assertion 1 : $T^* = +\infty$.
En effet, pour $t \in [0, T^*($, on a :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[g(x(t))] &= dg(x(t))\dot{x}(t) \\ &= -dg(x(t))(dg(x(t)))^{-1}g(x(t)) \\ &= -g(x(t)) \end{aligned}$$

Donc, $g(x(t)) = e^{-t}g(q)$
Donc,

$$\|g(x(t))\| \leq \|g(q)\| \text{ car } t \geq 0$$

$x(t) \in g^{-1}(B(0, \|g(q)\|))$ qui est un compact car g est propre. Donc, $T^* = +\infty$ d'après le lemme de sortie de tout compact (ou théorème de majoration a priori).
Assertion 2 : Chaque p_i est un point asymptotiquement stable. Autrement dit, $F(p_i) = 0$ et $\exists \delta > 0$ tel que si x est une trajectoire issue de q telle que $\mid q - p_i \mid < \delta$ alors $\lim_{t \to +\infty} x(t) = p_i$.
On a tout d'abord $F(p_i) = [dg(p_i)]^{-1}g(p_i) = 0$ car $g(p_i) = 0$.
Ensuite, g est un difféomorphisme d'une boule $B(p_i, \delta)$ sur un voisinage V de 0. Soit $y \in V$ et $q = g^{-1}(y) \in B(p_i, \delta)$. La fonction $x(t) = g^{-1}(e^{-t}y)$ est la trajectoire issue de q. En effet, $x(0) = g^{-1}(y) = q$ et

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= d(g^{-1})(e^{-t}y)(-e^{-t}y) \\ &= -d(g^{-1})(g(x(t))g(x(t)) \\ &= -[dg(x(t))]^{-1}g(x(t)) \\ &= -F(x(t)) \end{aligned}$$

C'est donc par unicité la trajectoire issue de q. Mais alors

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = \lim_{t \to +\infty} g^{-1}(e^{-t}y) = g^{-1}(0) = p_i$$

Soit W_i l'ensemble des points $q \in \mathbb{R}^n$ tel que la trajectoire issue de q converge vers p_i quand $t \to +\infty$.
Assertion 3 : $\mathbb{R}^n = \bigcup_{i=1}^{N} W_i$
Soit $q \in \mathbb{R}^n$ et $x(t)$ la trajectoire issue de q. On a vu dans l'assertion 1, que $x(t)$ reste dans un compact pour tout $t \geq 0$. Il existe donc $t_k \to +\infty$ telle que $x(t_k)$ converge vers l. Mais donc $g(l) = 0$ (car $g(x(t)) = e^{-t}g(q)$), donc $l = p_i$ pour un

certain i.
Fixons k_0 assez grand pour que $x(t_k) \in B(p_i, \delta)$ où δ est défini dans l'assertion 2. Alors la trajectoire $y(t)$ issue de $x(t_{k_0})$ converge vers p_i. Or, la fonction $z(t) = x(t + t_{k_0})$ est aussi trajectoire issue de $x(t_{k_0})$. Par unicité globale, on a $x(t + t_{k_0}) = y(t)$ et donc $x(t) \to p_i$ lorsque $t \to +\infty$.
Assertion 4 : Chaque W_i est ouvert.
Soit $q \in W_i$ et $x(t)$ la trajectoire issue de q. Il existe par définition de W_i, $T > 0$ tel que $\mid x(T) - p_i \mid \leq \delta/2$. Soit y la trajectoire issue de $q' \in \mathbb{R}^n$. Par continuité des solutions par rapport aux conditions initiales, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\mid q - q' \mid \leq \varepsilon$ implique $\mid x(T) - y(T) \mid \leq \delta/2$. Alors

$$\mid y(T) - p_i \mid \leq \mid y(T) - x(T) \mid + \mid x(T) - p_i \mid \leq \delta$$

Il résulte de l'assertion 2 que $y(t)$ converge vers p_i lorsque $t \to +\infty$, *i.e* $q' \in W_i$ et $B(q, \varepsilon) \subset W_i$ donc W_i est ouvert.
Assertion 5 : $N = 1$
Chaque W_i est un ouvert non vide et $W_i \cap W_j = \emptyset$ si $i \neq j$ (si $N \geq 2$), et $\mathbb{R}^n = \cup_{i=1}^N W_i$.
Si $N \geq 2$, cela contredit la connexité de $\mathbb{R}^n$. Donc, $N = 1$! ■

Remarque 1

J'ai trouvé deux applications et un exemple d'utilisations du théorème de Hadamard-Lévy sur internet :

- *http://grenoblesciences.ujf-grenoble.fr/pap-ebooks/lafontaine/sites/default/files/pdf/CP3_1.pdf*
- *http://www.les-mathematiques.net/phorum/read.php?4,357443,357532,quote=1*