Développement: Théorème de Hardy-Littlewood

Adrien Fontaine

13 novembre 2012

Référence : Gourdon, problème 22p289

Théorème 1 (***Théorème Taubérien fort de Hardy-Littlewood***)

Soit (a_n) une suite de réels vérifiant $a_n = \bigcirc(\frac{1}{n})$ en $+\infty$, telle que la série entière $\sum a_n z^n$ ait un rayon de convergence ≥ 1 et que sa somme $F(x)$ vérifie $\lim_{x\to 1^-} F(x) = s$. Alors la série $\sum a_n$ converge et vaut s.

Démonstration : Quitte à considérer $a_0 - s$ comme premier terme de la suite, on peut toujours supposer que $s = 0$.
On note :

$$\Phi = \{\varphi : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ tel que } \begin{cases} \sum a_n \varphi(x^n) \text{ converge} \\ \lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \varphi(x^n) = 0 \end{cases} \}$$

Soit g la fonction définie par :

$$\begin{array}{cccc} g & : & [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 1 & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases} \end{array}$$

Posons $N_x = \lfloor \frac{-\ln(2)}{\ln(x)} \rfloor$. Alors pour $x \in [0,1[$,

$$\sum_{n\geq 0} a_n g(x^n) = \sum_{n=0}^{N_x} a_n$$

De plus, $N_x \to +\infty$ quand $x \to 1^-$, donc si on arrive à montrer que $q \in \Phi$, alors on aura montré le théorème.
Montrons que tout polynôme nul en 0 est un élément de Φ, i.e $X\mathbb{R}[X] \subset \Phi$.
Il est clair que Φ est stable par combinaison linéaire, donc il suffit de montrer que $X^k \in \Phi$ pour tout $k \geq 1$. Soit $k \geq 1$, on a $\sum_{n\geq 0} a_n x^{kn}$ qui converge car si $x < 1$ alors $x^k < x < 1$.
De plus,

$$\forall x \in [0,1[, \sum_{n\geq 0} a_n x^{kn} = F(x^k) \to 0 \text{ quand } x \to 1^-$$

Donc, $X\mathbb{R}[X] \subset \Phi$.
On a maintenant besoin d'un lemme

Lemme 1

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], (1-x) \sum_{n\geq 0} x^n P(x^n) \to \int_0^1 P(t)dt \textit{ quand } x \to 1^-$$

Là encore, par linéarité, il suffit de démontrer le résultat pour tous les monômes $X^k, k \geq 0$. On a :

$$\begin{aligned}(1-x)\sum_{n\geq 0} x^n x^{kn} &= (1-x)\sum_{n\geq 0}(x^{k+1})^n \\ &= \frac{1-x}{1-x^{k+1}} \\ &= \frac{1}{1+x+...+x^k}\end{aligned}$$

donc, $\lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n\geq 0} x^n (x^k)^n = \frac{1}{k+1} = \int_0^1 t^k dt$. D'où le résultat pour tout polynôme P.
On va maintenant essayer de d'approcher g par des polynômes. Pour cela, on écrit g sous la forme $q(x) = x + x(1-x)h(x)$. Ce qui revient à considérer la fonction

$$h(x) = \frac{g(x)-x}{x(1-x)}$$

Ainsi,

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{x} & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe deux fonctions s_1 et s_2 continues telles que $s_1 \leq h \leq s_2$ et $\int_0^1 s_2 - s_1 < \varepsilon$ (faire un dessin pour s'en convaincre : prendre deux fonctions égales à h sur $[0,1]$sauf sur un petit voisinage de la discontinuité en $x = 1/2$, et joindre les extrémités dans la partie manquante par une ligne continue qui reste toujours du même côté du graphe de h et qui reste bornée). Comme s_1 et s_2 sont continues, on peut trouver deux polynômes t_1 et t_2 tels que $\mid t_1 - s_1 \mid < \varepsilon$ et $\mid t_2 - s_2 \mid < \varepsilon$ sur $[0,1]$ (théorème de Weierstrass). On pose alors $U_1 = t_1 - \varepsilon$ et $U_2 = t_2 + \varepsilon$. On a $U_1 \leq h \leq U_2$ (vu qu'on s'est suffisamment éloigné de t_1 et t_2) et

$$\begin{aligned}\int_0^1 U_2 - U_1 &= \int_0^1 t_2 - t_1 + 2\varepsilon \\ &\leq \int_0^1 t_2 - s_2 + s_2 - s_1 + s_1 - t_1 + 2\varepsilon \\ &\leq \varepsilon + \int_0^1 s_2 - s_1 + 3\varepsilon \\ &< 5\varepsilon\end{aligned}$$

Compte tenu de ce qui vient d'être fait, il est naturel de poser

$$\begin{aligned}P_1(x) &= x + x(1-x)U_1(x) \\ P_2(x) &= x + x(1-x)U_2(x) \\ Q(x) = U_2(x) - U_1(x) &= \frac{P_2(x) - P_1(x)}{x(1-x)}\end{aligned}$$

On a alors :

$$\begin{cases} P_1(0) = P_2(0) = 0 \\ P_1(1) = P_2(1) = 1 \\ P_1 \leq g \leq P_2 \\ \int_0^1 Q \leq 5\varepsilon \end{cases}$$

Il ne nous reste plus qu'à conclure.
Par hypothèse, il existe $M > 0$ tel que $a_n \leq \frac{M}{n}$ pour tout n. Soit $x \in [0, 1[$. On a :

$$\begin{aligned}
&\mid \sum_{n\geq 0} a_n g(x^n) - \sum_{n\geq 0} a_n P_1(x^n) \mid \\
&\leq \sum_{n\geq 0} \mid a_n \mid (P_2 - P_1)(x^n) \\
&\leq M \sum_{n\geq 0} \frac{x^n(1-x^n)}{n} Q(x^n)
\end{aligned}$$

Or,

$$1 - x^n = (1-x)(1 + x + ... + x^{n-1}) \leq n(1-x)$$

D'où,

$$\mid \sum_{n\geq 0} a_n g(x^n) - \sum_{n\geq 0} a_n P_1(x^n) \mid \leq M(1-x) \sum_{n\geq 0} x^n Q(x^n)$$

donc,

$$\mid a_n g(x_n) \mid \leq \mid \sum_{n\geq 0} a_n P_1(x^n) \mid + M(1-x) \sum_{n\geq 0} x^n Q(x^n)$$

D'après le lemme, le deuxième terme de cette inégalité tend vers $M \int_0^1 Q(t)dt \leq 5M\varepsilon$ quand $x \to 1^-$. Et le premier terme tend vers 0 car $P_1 \in \Phi$ d'après la première étape de la démonstration. D'où le résultat. ■