Développement: Théorème de la phase stationnaire

Adrien Fontaine

9 avril 2014

Référence : Miller, Applied Asymptotic Analysis
Zuily-Queffelec, Analyse pour l'agrégation.

Théorème 1

Soient $u \in C_o^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et $\Phi \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose que Φ possède un unique point critique sur $Supp(u)$, et que ce point critique est non dégénéré :

$$\exists! x_c \in Supp(u) / \Phi'(x_c) = 0 \text{ et on a } \Phi''(x_c) \neq 0$$

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on note :

$$I(\lambda) := \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda\Phi(x)} u(x) dx$$

Alors, on a :

$$I(\lambda) \underset{\lambda \to +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} \frac{e^{i\frac{\pi}{4} sign(\Phi''(x_c))}}{|\Phi''(x_c)|^{1/2}} u(x_c) e^{i\lambda\Phi(x_c)}$$

Démonstration : Pour simplifier les notations, on suppose que $x_c = 0$. La preuve du théorème s'organise de la façon suivante :

1. On applique une formule de Taylor au voisinage de 0 pour se ramener à quelque chose qui est quadratique dans un voisinage de 0.
2. On montre que les contributions en dehors de ce voisinage sont négligeables dans l'intégrale $I(\lambda)$.
3. Par changement de variable, on se ramène à une phase quadratique.
4. On conclut en appliquant la formule de Parseval.

1. D'après la formule de Taylor avec reste intégral,

$$\Phi(x) - \Phi(0) = x^2 \int_0^1 \Phi''(tx)(1-t) dt$$

Par hypothèse $\Phi''(0) \neq 0$, donc il existe $\delta_1 > 0$ tel que Φ'' ne s'annule pas sur $]-\delta_1, \delta_1[$. Alors pour tout $x \in]-\delta_1, \delta_1[$, et pour tout $t \in [0,1]$, $\Phi''(tx)$ est de signe constant, et donc $|\Phi''(tx)| = sign(\Phi''(0))\Phi''(tx)$. On définit ψ sur U par

$$\begin{aligned}
\forall x \in U, \psi(x) &:= x \left| \int_0^1 2(1-t)\Phi''(tx) dt \right|^{1/2} \\
&= x \left(sign(\Phi''(0)) \int_0^1 2(1-t)\Phi''(tx) dt \right)^{1/2} \\
&= x \sqrt{sign(\Phi''(0))\theta(x)}
\end{aligned}$$

où l'on a posé $\theta(x) = \int_0^1 2(1-t)\Phi''(tx)dt$.
Alors, $\forall x \in]-\delta_1, \delta_1[, \theta(x) \neq 0$. De plus, ψ est de classe C^∞ sur $]-\delta_1, \delta_1[$, $\Psi(0) = 0$ et

$$\forall x \in]-\delta_1, \delta_1[, \psi'(x) = \sqrt{sign(\Phi''(0)\theta(x)} + x\frac{sign(\Phi''(0)\theta'(x)}{2\sqrt{sign(\Phi''(0))\theta(x)}}$$

Donc, $\psi'(0) = \sqrt{|\Phi''(0)|} \neq 0$.
Donc, d'après le théorème d'inversion locale, il existe $\delta \leq \delta_1$, tel que $\psi :]-\delta, \delta[\to \psi(]-\delta, \delta[)$ soit un C^1-difféomorphisme.
Et donc pour tout $x \in \psi(]-\delta, \delta[)$, on a :

$$\Phi \circ \psi^{-1}(x) - \Phi(0) = \frac{1}{2} sign(\Phi''(0))x^2$$

2. Soit maintenant χ une fonction de troncature vérifiant les propriétés suivantes : $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $Supp(\chi) \subset]-\delta, \delta[$ et $\chi \equiv 1$ sur $]-\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}[$. L'intégrale $I(\lambda)$ se décompose alors en

$$I(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda\Phi(x)}(u\chi)(x)dx + \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda\Phi(x)}(u(1-\chi))(x)dx$$

La première intégrale correspond au comportement de $I(\lambda)$ près de 0, et le deuxième au comportement loin de 0. La seconde intégrale est négligeable d'après le lemme suivant :

Lemme 1 (*de la phase non stationnaire*)

Soit $v \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. On suppose que Φ' ne s'annule pas sur $Supp(v)$. Alors, pour tout $N \geq 0$, il existe une constante C (qui dépend de N, Φ et v) telle que

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \left| \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda\Phi(x)} v(x)dx \right| \leq \frac{C}{\lambda^N}$$

Démonstration : Il suffit d'écrire

$$\int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda\Phi(x)} v(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \Phi'(x)e^{i\lambda\Phi(x)} \frac{v(x)}{\Phi'(x)}dx$$

et de remarquer que, par hypothèse, $\frac{v}{\Phi'} \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Une intégration par partie donne alors :

$$\int_{\mathbb{R}} \Phi'(x)e^{i\lambda\Phi(x)} \frac{v(x)}{\Phi'(x)}dx = \frac{i}{\lambda} \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda\Phi(x)} \left(\frac{v(x)}{\Phi'(x)}\right)' dx$$

La fonction $\left(\frac{v}{\Phi'}\right)'$ est elle aussi dans $C_0^\infty(\mathbb{R})$, donc on peut recommencer cette manœuvre N fois pour démontrer le lemme. ■

3. On va maintenant se ramener par un changement de variable, au cas d'une phase quadratique dans la première intégrale.
Comme χ est à support dans $]-\delta, \delta[$, et que ψ est un C^∞-difféomorphisme sur $]-\delta, \delta[$, on peut poser le changement de variable $x = \psi^{-1}(y)$. On a alors :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda\Phi(x)}(u\chi)(x)dx &= \int_{\psi(]-\delta,\delta[)} e^{i\lambda\Phi\circ\psi^{-1}(y)}(u\chi)(\psi^{-1}(y))|(\psi^{-1})'(y)|dy \\ &= e^{i\lambda\Phi(0)} \int_{\psi(]-\delta,\delta[)} e^{i\frac{\lambda}{2}sign(\Phi''(0))y^2}(u\chi)(\psi^{-1}(y))|(\psi^{-1})'(y)|dy\end{aligned}$$

d'après ce qui a été fait à la première étape.
On s'est ainsi ramené au cas où $\Phi(y) = y^2$.

4. L'idée va désormais être d'utiliser la formule de Parseval. En effet, prendre la transformation de Fourier du facteur exponentielle revient à faire passer le y au dénominateur dans l'exponentielle comme le montre le lemme suivant, qui donne la transformée de Fourier de la gaussienne :

Lemme 2

$$\forall z \in \mathbb{C}/Re(z) > 0, \forall \xi \in \mathbb{R}, \mathcal{F}(e^{-zx^2})(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-zx^2 - i\xi x} dx = \sqrt{\frac{\pi}{z}} e^{-\xi^2/4z}$$

Démonstration : voir ZQ p 330 ■

Puisque $e^{i\frac{\lambda}{2}sign(\Phi''(0))y^2} \notin L^2(\mathbb{R})$, on ne peut utiliser la formule de Parseval valable dans $L^2(\mathbb{R})$. Cependant, $e^{i\frac{\lambda}{2}sign(\Phi''(0))y^2}$ est bornée donc c'est une distribution tempérée (un élément de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$) : sa transformée de Fourier est donc bien définie comme une distribution tempérée. Par ailleurs, si on pose $w(y) = (u\chi)(\psi^{-1}(y))|(\psi^{-1})'(y)|$, alors $w \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$. La formule de Parseval dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ nous donne alors :

$$\begin{aligned}
&\int_{\psi(]-\delta,\delta[)} e^{i\frac{\lambda}{2}sign(\Phi''(0))y^2}(u\chi)(\psi^{-1}(y))|(\psi^{-1})'(y)|dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{i\frac{\lambda}{2}sign(\Phi''(0))y^2} w(y)dy \\
&= < e^{i\frac{\lambda}{2}sign(\Phi''(0))y^2}, w(.) >_{\mathcal{S}'} \\
&= \frac{1}{2\pi} < \mathcal{F}(e^{i\frac{\lambda}{2}sign(\Phi''(0))y^2}), \hat{w}(\xi) >_{\mathcal{S}'}
\end{aligned}$$

Or, pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$< \mathcal{F}\left(e^{i\lambda x^2}\right), \varphi >_{\mathcal{S}'} = \lim_{\varepsilon \to 0} < \mathcal{F}\left(e^{-\varepsilon x^2} e^{i\lambda x^2}\right), \varphi >_{\mathcal{S}'}$$

par continuité de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{S}'$ et le fait que $e^{-\varepsilon x^2} \to 1$ dans $\mathcal{S}'$ par le théorème de convergence dominée.

Par ailleurs, d'après le lemme **??**, on a

$$\lim_{\varepsilon \to 0} < \mathcal{F}\left(e^{-\varepsilon x^2} e^{i\lambda x^2}\right), \varphi >_{\mathcal{S}'} = \lim_{\varepsilon \to 0} < \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\varepsilon - i\lambda}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4(\varepsilon - i\lambda)}\right), \varphi >_{\mathcal{S}'}$$

Or, pour tout $\lambda \neq 0$ et pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{cases}
\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4(\varepsilon - i\lambda)}\right) = \exp\left(-i\frac{\xi^2}{4\lambda}\right) \\
\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \sqrt{\varepsilon - i\lambda} = \begin{cases} e^{i\frac{\pi}{4}}\sqrt{|\lambda|} & \text{si } \lambda < 0 \\ e^{-i\frac{\pi}{4}}\sqrt{\lambda} & \text{si } \lambda > 0 \end{cases}
\end{cases}$$

On en déduit donc, par le théorème de convergence dominée, que :

$$< \mathcal{F}\left(e^{i\lambda x^2}\right), \varphi >_{\mathcal{S}'} = \frac{1}{2\sqrt{\pi|\lambda|}} e^{isign(\lambda)\frac{\pi}{4}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\frac{\xi^2}{4\lambda}} \varphi(\xi) d\xi$$

D'où, pour tout $\lambda > 0$,

$$\frac{1}{2\pi} < \mathcal{F}(e^{i\frac{\lambda}{2}sign(\Phi''(0))y^2}), \hat{w}(\xi) >_{\mathcal{S}'} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}} e^{isign(\Phi''(0))\frac{\pi}{4}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\frac{\xi^2}{2\lambda}sign(\Phi''(0))} \hat{w}(\xi) d\xi$$

Par convergence dominée, on a :

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\frac{\xi^2}{2\lambda} sign(\Phi''(0))} \hat{w}(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}} \hat{w}(\xi) d\xi = 2\pi w(0)$$

d'après le formule d'inversion de Fourier.
Enfin, on a aussi :

$$\begin{aligned} w(0) &= (u\xi)(0)(\psi^{-1})'(0) \\ &= \frac{u(0)}{\psi'(0)} \\ &= \frac{u(0)}{|\Phi''(0)|^{1/2}} \end{aligned}$$

D'où,

$$I(\lambda) \underset{\lambda \to +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} \frac{e^{i\frac{\pi}{4} sign(\Phi''(0))}}{|\Phi''(0)|^{1/2}} u(0) e^{i\lambda\Phi(0)} \qquad \blacksquare$$