Développement: Théorème de Lyapounov

Adrien Fontaine

12 novembre 2012

Référence : Rouvière, exercice 46p138

Théorème 1 (***Théorème de Lyapounov***)

Soit le système différentiel

$$\begin{cases} y' &= f(y) \\ y(0) &= x \end{cases} \tag{1}$$

avec $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *de classe* C^1 *et* $f(0) = 0$*. Si la matrice* $Df(0)$ *a toutes ses valeurs propres de partie réelle strictement négative, alors l'origine est un point d'équilibre attractif du système. Plus précisément, pour tout* x *assez voisin de 0, la solution* $y(t)$ *tend exponentiellement vers 0 lorsque* t *tend vers* $+\infty$*.*

Posons $A = Df(0)$.
On a d'abord besoin d'un petit lemme d'algèbre linéaire.

Lemme 1

Soient $\lambda_1, ..., \lambda_k$ *les valeurs propres distinctes de* A*. Alors, il existe un polynôme* P *tel que pour tous* $t \in \mathbb{R}$ *et* $x \in \mathbb{R}^n$*,*

$$\|e^{tA}x\| \leq P(\mid t \mid) \left(\sum_{j=1}^{k} e^{tRe(\lambda_j)} \right) \|x\|$$

Démonstration : D'après le lemme de décomposition des noyaux, pour tout $x \in \mathbb{C}^n$, on a une décomposition unique sous la forme $x = x_1 + ... + x_k$ avec $x_j \in E_j = Ker(A - \lambda_j I)^{m_j}$ où m_j est la multiplicité de la valeur propre λ_j.
Chaque sous espace E_j est stable par A [1], et

$$\begin{aligned} e^{tA}x_j &= e^{t\lambda_j I} e^{t(A-\lambda_j I)} x_j \\ &= e^{t\lambda_j} \left(\sum_{0 \leq p < m_j} \frac{t^p}{p!} (A - \lambda_j I)^p \right) x_j \end{aligned}$$

car $(A - \lambda_j I)^p x_j = 0$ pour tout $p \geq m_j$.
Si on munit $\mathbb{C}^n$ d'une norme quelconque, on a donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $1 \leq j \leq k$, une inégalité

1. A quoi ça sert de dire ça ?

de la forme :

$$\begin{aligned}
\|e^{tA}x_j\| &\leq e^{tRe(\lambda_j)} \sum_{0\leq p<m_j} \frac{t^p}{p!}\|(A-\lambda_j I)^p\|.\|x_j\| \\
&\leq e^{tRe(\lambda_j)}.C_j. \mid \sum_{p=0}^{m_j-1} \frac{t^p}{p!} \mid \|x_j\| \text{ avec } C_j = \max_{0\leq p<m_j} \|(A-\lambda_j I)^p\| \\
&\leq e^{tRe(\lambda_j)}.C_j.(1+\mid t \mid)^{m_j-1}\|x_j\| \\
&\leq e^{tRe(\lambda_j)}.C.(1+\mid t \mid)^{n-1}\|x_j\| \text{ avec } C = \max C_j
\end{aligned}$$

D'où, pour $x \in \mathbb{C}^n$,

$$\begin{aligned}
\|e^{tA}x\| &\leq \sum_{j=1}^{k} \|e^{tA}x_j\| \\
&\leq C.P(\mid t \mid) \sum_{j=1}^{k} e^{tRe(\lambda_j)}\|x_j\| \\
&\leq C.P(\mid t \mid) \max_{1\leq j\leq k} \|x_j\| \left(\sum_{j=1}^{k} e^{tRe(\lambda_j)}\right) \\
&\leq C'.P(\mid t \mid) \left(\sum_{j=1}^{k} e^{tRe(\lambda_j)}\right) \|x\|
\end{aligned}$$

compte tenu de l'équivalence des normes (on est en dimension finie). Le lemme est ainsi démontré. ■

On peut maintenant passer à la preuve du théorème de Lyapounov à proprement dite.

Démonstration : Considérons le système linéarisé

$$\begin{cases} z' &= Az \\ z(0) &= x \end{cases} \tag{2}$$

La solution de ce système est

$$z(t) = e^{tA}x$$

D'après l'hypothèse sur les valeurs propres de A, il existe $a > 0$ tel que $Re(\lambda_j) < -a$pour tout $1 \leq j \leq k$. Et donc, pour tout $1 \leq j \leq k$,

$$P(\mid t \mid)e^{tRe(\lambda_j)}e^{at} \to 0 \text{ quand } t \to +\infty$$

Donc,

$$P(\mid t \mid)e^{tRe(\lambda_j)} \leq Cste.e^{-ta}$$

Et donc d'après le lemme que l'on vient de démontrer, pour tout $t \geq 0$,

$$\|z(t)\| \leq Cste.e^{-ta}\|x\|$$

Ainsi, $z(t)$ tend exponentiellement vers 0 quand t tend vers $+\infty$ et l'origine est donc un point d'équilibre attractif.
On va maintenant essayer de se ramener au système non linéarisé.
Pour cela, on considère la forme bilinéaire symétrique définie sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, b(x,y) = \int_0^{+\infty} < e^{tA}x, e^{tA}y > dt$$

b est bien définie car d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} < e^{tA}x, e^{tA}y > &\leq \|e^{tA}x\| \|e^{tA}y\| \\ &\leq Cste.e^{-2at}\|x\|\|y\| \end{aligned}$$

qui est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
De plus, b est clairement bilinéaire et symétrique d'après les propriétés du produit scalaire et de l'intégrale.
Soit q la forme quadratique associée à b. On a :

$$q(x) = b(x,x) = \int_0^{+\infty} \|e^{tA}x\|^2 dt$$

Donc q est positif pour tout x, et q s'annule, si et seulement si, la fonction sous l'intégrale est nulle, c'est à dire $x = 0$. Donc, q est définie positive.
Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$q(x+ty) = q(x) + 2tb(x,y) + t^2 q(y)$$

d'où,

$$Dq(x).y = 2b(x,y)$$

En particulier,

$$\begin{aligned} < \overrightarrow{grad}(q(x)), Ax > &= Dq(x).Ax \\ &= 2b(x, Ax) \\ &= \int_0^{+\infty} 2 < e^{tA}x, e^{tA}Ax > dt \end{aligned}$$

Or,

$$\frac{d}{dt}\left(< e^{tA}x, e^{tA}x >\right) = 2 < e^{tA}x, e^{tA}y >$$

Donc,

$$\begin{aligned} < \overrightarrow{grad}(q(x)), Ax > &= \int_0^{+\infty} \frac{d}{dt}\left(< e^{tA}x, e^{tA}x >\right) dt \\ &= \lim_{T\to+\infty} \left[\|e^{tA}x\|^2\right]_0^T \\ &= -\|x\|^2 \end{aligned}$$

d'après l'étude du système linéarisé réalisée précédemment.
Donc,

$$< \overrightarrow{grad}(q(x)), Ax >= 2b(x, Ax) = -\|x\|^2$$

Par ailleurs, f étant C^1, on a par le théorème de Cauchy-Lipschitz, l'existence et l'unicité d'une solution maximale y de (1), définie sur un intervalle de la forme $[0, a[$, où $a \in]0, +\infty]$.
Posons $r(y) = f(y) - Ay$.
On a :

$$\begin{aligned} q(y)' &= Dq(y).y' \\ &= 2b(y, y') \\ &= 2b(y, f(y)) \\ &= 2b(y, Ay) + 2b(y, r(y)) \\ &\leq -\|y\|^2 + 2b(y, r(y)) \end{aligned}$$

Pour le système linéarisé, on aurait simplement $q(z)' = -\|z\|^2$. L'idée est que, r étant petit, les fonction $q(y(t))$ et $q(z(t))$ auront à peu près le même comportement pour t grand (même si pour l'instant, on ne sait pas si t peut être grand ou pas, puisqu'on a montré l'existence de y seulement sur $[0, a[$). Pour préciser cela, on va essayer de majorer $b(y, r(y))$ en utilisant q.
q étant une forme quadratique définie positive, $\sqrt{q}$ est une norme. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$| b(y, r(y)) | \leq \sqrt{q(y)} \times \sqrt{q(r(y))} \tag{3}$$

Par ailleurs, par définition de la différentielle, pour une norme $\|.\|$,

$$\forall h, f(0+h) = f(0) + Df(0).h + \|h\|\varepsilon(h) \text{ où } \varepsilon(h) \to 0 \text{ quand } \|h\| \to 0$$

D'où,

$$f(y) - f(0) - Df(0).y = \sqrt{q(y)}\varepsilon(y)$$

Donc, pour tout $\varepsilon > 0$ [2], il existe $\alpha > 0$ tel que si $q(y) \leq \alpha$, alors

$$\sqrt{q(r(y))} \leq \varepsilon\sqrt{q(y)}$$

D'où, en injectant dans (3),

$$| 2b(y, r(y)) | \leq 2\varepsilon\sqrt{q(y)}$$

Or, par équivalence de $\|.\|$ et $\sqrt{q}$, il existe une constante C_0 telle que $C_0 q(y) \leq \|y\|^2$. D'où,

$$\begin{aligned} q(y)' &= -\|y\|^2 + 2b(y, r(y)) \\ &\leq -(C_0 - 2\varepsilon)q(y) \end{aligned}$$

On choisit alors $\varepsilon < \frac{C_0}{2}$ et on pose $\beta = C_0 - 2\varepsilon$, on a alors montré que

$$q(y) \leq \alpha \Rightarrow q(y)' \leq -\beta q(y)$$

Supposons $q(x) < \alpha$. Alors montrons que $q(y(t)) < \alpha$ pour tout $t \in [0, a[$.
Par l'absurde, on suppose que $\exists 0 \leq t < a$ tel que $q(y(t)) \geq \alpha$. On pose $t_0 = \inf\{t \in [0, a[, q(y(t)) = \alpha\}$ (cet ensemble est non vide par le théorème des valeurs intermédiaires, $q(y(t))$ étant continue).
Par continuité de $q(y(t)$, on a $q(y(t_0)) = \alpha$. D'où,

$$q(y)'(t_0) \leq -\beta q(y)(t_0) = -\beta\alpha < 0$$

Donc, $q(y(t)) > \alpha$ sur un $]t_0 - \varepsilon, t_0]$, ce qui contredit la minimalité de t_0. D'où, $q(y(t)) < \alpha$ pour tout $t \in [0, a[$. En particulier, y reste dans un compact donc $a = +\infty$. Et

$$\forall t \geq 0, \frac{d}{dt}\left(q(y(t)) \leq -\beta q(y(t))\right.$$

or,

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\beta t} q(y(t))\right) = e^{\beta t}\left[\beta q(y(t)) + \frac{d}{dt}\left(q(y(t))\right)\right] \leq 0$$

donc, $t \mapsto e^{\beta t} q(y(t))$ est décroissante sur $\mathbb{R}^+$, et

$$\forall t \geq 0, e^{\beta t} q(y(t)) \leq e^{0t} q(y(o)) = q(x)$$

donc,

$$\forall t \geq 0, q(y(t)) \leq e^{-\beta t} q(x) \to 0 \text{ quand } t \to +\infty$$

Par équivalence des normes $\|.\|$ et $\sqrt{q}$, 0 est donc un point d'équilibre attractif de (1) et on a donc montré le théorème de Lyapounov. ■

2. Attention à ne pas confondre ε la fonction et ε le réel > 0