Développement: Théorème de Rothstein-Trager

Adrien Fontaine

10 février 2013

Référence : Philippe Saux Picart, Cours de calcul formel Algorithmes fondamentaux p151-155

1 Intégration de fractions rationnelles

Problème : Calculer des primitives de fractions rationnelles.
Cadre : On se place dans la situation "simple" des fractions rationnelles à coefficients rationnels. Soit $\frac{P}{Q} \in \mathbb{Q}(X)$ telle que $P \wedge Q = 1$, $Q \neq 1$, et $deg(P) < deg(Q)$ (on dit alors que la fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$ est propre). On peut toujours se ramener à cette situation, quitte à faire la division euclidienne de P par Q,n puis un calcul de *pgcd*.
On veut trouver une primitive de $\frac{P}{Q}$.
A priori, on pourrait se contenter de décomposer en élément simples $\frac{P}{Q}$. *Mais* la recherche des racines des dénominateurs peut s'avérer très difficile, même en utilisant des méthodes numériques pour trouver des valeurs approchées, ce qui biens sur ne nous fournirait pas de manière exacte une primitive.
En fait, on peut se passer d'un tel calcul. C'est l'objet de ce développement.

2 Réduction du problème

2.1 Quelques résultats sur la décomposition sans facteur carré

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, où $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$.

Définition 1

On dit que P est sans facteur carré *s'il n'existe pas de polynôme Q, non constant, dans $\mathbb{K}[X]$ tel que $Q^2 \mid P$.*

Proposition 1

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. *P est sans facteur carré dans $\mathbb{K}[X]$.*
2. *$P \wedge P' = 1$ (P' désignant la dérivée de P).*
3. *P est sans facteur carré dans $\mathbb{C}[X]$.*
4. *P n'a que des racines simples dans $\mathbb{C}$.*

Corollaire 1

$\frac{P}{P \wedge P'}$ est sans facteur carré.

Théorème 1

Il existe $P_1, ..., P_k \in \mathbb{K}[X]$ tel que, les P_i sont premiers entre eux deux à deux, sans facteur carrés, et les racines de multiplicité i de P sont exactement les racines de P_i.

Remarque 1

La preuve de ce théorème fournit un algorithme pour déterminer cette décomposition.

2.2 Travail préparatoire

D'après le théorème 1, on peut écrire Q sous la forme

$$Q = Q_1 Q_2^2 ... Q_r^r$$

avec les Q_i premiers entre eux deux à deux, et seulement à racines simples.
On peut alors écrire notre fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$ sous la forme :

$$\frac{P}{Q} = \frac{G_{11}}{Q_1} + \frac{G_{21}}{Q_2} + \frac{G_{22}}{Q_2^2} + \frac{G_{31}}{Q_3} + \frac{G_{32}}{Q_3^2} + ... + \frac{G_{rr}}{Q_r^r}$$

où les polynômes G_{ij} sont à coefficients rationnels et tels que $deg(G_{ij}) < deg(Q_i)$.
Nous sommes ainsi ramenés à des calculs de primitives de fractions du type $\frac{u}{v^n}$, où v est sans facteur carré et premier avec u, et $n \geq 0$. Lorsque $n \geq 2$, on peut exprimer $\int \frac{u}{v^n}$ en fonction de $\int \frac{u}{v^{n-1}}$ par des méthodes élémentaires. En effet, comme v est sans facteur carré, il est premier avec sa dérivée, et il existe deux polynômes c et d de $\mathbb{Q}[X]$ tels que $cv + dv' = 1$, polynômes que l'on obtient par l'algorithme d'Euclide étendu. On peut donc écrire, pour $n \geq 2$,

$$\begin{aligned}
\int \frac{u}{v^n} &= \int \frac{ucv + udv'}{v^n} = \int \frac{cu}{v^{n-1}} + \int \frac{udv'}{v^n} \\
&= \int \frac{cu}{v^{n-1}} - \frac{ud}{(n-1)v^{n-1}} + \int \frac{(ud)'}{(n-1)v^{n-1}} \\
&= -\frac{ud}{(n-1)v^{n-1}} + \frac{1}{n-1} \int \frac{(n-1)cu + (ud)'}{v^{n-1}}
\end{aligned}$$

De proche en proche, on voit donc que l'on pourra écrire :

$$\int \frac{P}{Q} = \frac{U}{V} + \int \frac{P_1}{Q_1} + \int \frac{P_2}{Q_2} + ... + \int \frac{P_r}{Q_r}$$

avec $\frac{U}{V} \in \mathbb{Q}(X)$. En regroupant les intégrales qu'il nous reste à évaluer, on obtient

$$\int \frac{P}{Q} = \frac{U}{V} + \int \frac{\tilde{P}}{Q_1 Q_2 ... Q_r}$$

Le numérateur de la partie à intégrer, peut être rendu de degré plus petit que le dénominateur en effectuant une division euclidienne, et, bien sûr, la fraction rationnelle pourra être réduite, de sorte que nous sommes ramenés au problème suivant : calculer $\int \frac{P}{Q}$ avec P et Q dans $\mathbb{Q}[X]$, $P \wedge Q = 1$, $deg(P) < deg(Q)$ et Q sans facteur carré, unitaire.
Le théorème de Rothstein-Trager, répond à notre problème.

3 Le théorème de Rothstein-Trager

Théorème 2

Soient P et $Q \in \mathbb{Q}[X]$ tels que $P \wedge Q = 1$, $deg(P) < deg(Q)$ et Q sans facteur carré et unitaire. Soit $\mathbb{K}$ une extension de $\mathbb{Q}$ dans laquelle on puisse écrire[1]

$$\int \frac{P}{Q} = \sum_{i=1}^{n} c_i \log(P_i) \tag{1}$$

où les c_i sont des constantes non nulles de $\mathbb{K}$, que l'on peut supposer différentes (quitte à regrouper plusieurs logarithmes), et où les P_i sont des polynômes unitaires, non constants, sans facteur carré et premiers entre eux deux à deux dans $\mathbb{K}[X]$. Alors, les c_i sont les racines du polynôme

$$R(Y) = Res_X(P - YQ', Q) \in \mathbb{K}[Y]$$

et, pour chaque i, le polynôme P_i vaut :

$$P_i = (P - c_i Q') \wedge Q$$

Démonstration : Notons

$$\forall 1 \leq i \leq n, U_i = \frac{\prod_{j=1}^{n} P_j}{P_i}$$

En dérivant la relation (1), on a :

$$\frac{P}{Q} = \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{P_i'}{P_i}$$

d'où,

$$P \times \prod_{j=1}^{n} P_j = \sum_{i=1}^{n} c_i P_i' U_i$$

donc,

$$Q \mid \prod_{j=1}^{n} P_j \text{ et } P_j \mid \sum_{i=1}^{n} c_i Q P_i U_i \text{ dans } \mathbb{K}[X]$$

Mais, par définition, $P_j \mid U_i$ pour tout $j \neq i$, donc

$$P_j \mid c_j Q P_j' U_j$$

Or, par hypothèse, P_j est sans facteur carré, donc $P_j \wedge P_j' = 1$, donc

$$P_j \mid c_j Q U_j$$

Mais, P_j est premier avec tous les P_i pour $i \neq j$, donc $P_j \wedge U_j = 1$. Donc,

$$P_j \mid Q \text{ et ce pour tout } j$$

Mais, encore une fois, comme les P_j sont premiers entre eux, on a :

$$\prod_{j=1}^{n} P_j \mid Q$$

Ces deux polynômes se divisent donc l'un l'autre dans $\mathbb{K}[X]$, donc ils sont associés. Mais comme ils sont tous les deux unitaires, ils sont égaux. Donc,

$$Q = \prod_{j=1}^{n} P_j \text{ et } P = \sum_{i=1}^{n} c_i P_i' U_i$$

Montrons maintenant que pour tout i, $P_i \mid (P - c_i Q')$.
Comme $Q = \prod_{i=1}^{n} P_i$, on a :

$$Q' = \sum_{i=1}^{n} P_i' U_i$$

Par suite,

$$\begin{aligned} P - c_i Q' &= \sum_{j=1}^{n} c_j P_j' U_j - \sum_{j=1}^{n} c_i P_j' U_i \\ &= \sum_{j=1}^{n} (c_j - c_i) P_j' U_j \end{aligned}$$

Dans cette somme, le terme $j = i$ est nul, et pour tous les autres termes, $P_i \mid U_j$. Donc,

$$P_i \mid P - c_i Q'$$

On va maintenant pouvoir conclure que

$$P_i = Q \wedge (P - c_i Q')$$

En effet,

$$\begin{aligned} (P - c_i Q') \wedge Q &= (P - c_i Q') \wedge \prod_{j=1}^{n} P_j \\ &= \prod_{j=1}^{n} ((P - c_i Q') \wedge P_j) \end{aligned}$$

car les P_j sont premiers entre eux.
Par ailleurs,

$$\begin{aligned} (P - c_i Q') \wedge P_j &= (\sum_{k=1}^{n} (c_k - c_i) P_k' U_k) \wedge P_j \\ &= (c_j - c_i) P_j' U_j \wedge P_j \\ &= 1 \end{aligned}$$

car $P_j' \wedge P_j = 1$ (P_j sans facteur carré) et $P_j \wedge U_j = 1$, c_i étant distinct de c_j par définition. D'où,

$$(P - c_i Q') \wedge Q = (P - c_i Q') \wedge P_i = P_i$$

puisque nous avons vu que P_i divise $P - c_i Q'$.
Le coefficient c_i est donc tel que les polynômes $P - c_i Q'$ et Q ont un pgcd non trivial et on a ainsi $Res_X(P - c_i Q') = 0$. Ce qui montre bien que les coefficients c_i sont racines distinctes du polynôme $R(Y) = Res_X(P - YQ', Q)$.
Il reste à montrer qu'on a bien ainsi toutes les racines de $R(Y) = Res_X(P - YQ', Q)$. Considérons donc une racine c de R dans une extension $\mathbb{L}$ de $\mathbb{K}$, et supposons qu'elle n'apparaisse pas parmi les c_i de la relation (1). Alors $P - cQ' \wedge Q = S \in \mathbb{L}[X]$ est un polynôme de degré non nul. Si T désigne

un facteur irréductible de S, T divise à la fois $P - cQ'$ et Q. Comme $Q = \prod_{i=1}^{n} P_i$ et que les P_i sont premiers entre eux, T divise un seul d'entre eux, soit P_{i_0}. Mais, $P - cQ' = \sum_{j=1}^{n} (c_j - c) P'_j U_j$. T divisant P_{i_0} et donc tous les U_j pour $j \neq i_0$, et divisant aussi $P - cQ'$, on a :

$$T \mid (c_{i_0} - c) P'_{i_0} U_{i_0}$$

Le polynôme T ne divise pas U_{i_0} car T ne divise aucun des P_i pour $i \neq i_0$. Comme $c_{i_0} \neq c$, il en découle que T divise P'_{i_0} et ainsi, P_{i_0} ne sera pas sans facteur carré, contrairement aux hypothèses. Contradiction. ■