Développement: Théorème de Sarkowski

Adrien Fontaine

8 octobre 2013

Référence : Oraux X-ENS, Analyse 1, exercice 2.22p92

Définition 1

Soit I un segment de $\mathbb{R}$ et $f : I \to I$ une application continue. Si $x \in I$ vérifie $f^n(x) = x$ et $f^k(x) \neq x$ pour $k \in \{1, ..., n-1\}$, on dit que x est un point n-périodique.

Notation : Si I_1 et I_2 sont deux segments tels que $I_2 \subset f(I_1)$, on note $I_1 \to I_2$.

Théorème 1

Soit I un segment de $\mathbb{R}$ et $f : I \to I$ une application continue. Si il existe un point 3-périodique pour f, alors il existe des ponts n-périodiques pour f pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Démonstration : On va d'abord démontrer le lemme suivant :

Lemme 1

Si K est un segment inclus dans $f(I)$, alors il existe un segment L inclus dans I tel que $K = f(L)$.

Démonstration : Posons $K = [\alpha, \beta]$. Comme $K =\subset f(I)$, il existe $(a, b) \in I^2$ tel que $\alpha = f(a)$ et $\beta = f(b)$. Si $\alpha = \beta$, alors $K = \{\alpha\}$ et le singleton $L = \{a\}$ convient. Supposons désormais $\alpha \neq \beta$ et donc $a \neq b$.

– Si $a < b$. L'idée est de prendre dans $[a, b]$ un antécédent u de α et un antécédent v de β, tels qu'entre u et v , il n'y ait plus d'autre antécédent de α ni de β. Considérons l'ensemble

$$A = \{x \in [a, b], f(x) = \beta\}$$

Alors A est un ensemble fermé non vide (il contient b) et minoré par a. On peut donc considérer

$$v = \inf\{x \in A\}$$

Par continuité de f, on a $f(v) = \beta$ et $f(t) < \beta$ pour tout $t \in [a, v[$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires (car $f(a) = \alpha < \beta$). Considérons maintenant l'ensemble

$$B = \{x \in [a, v], f(x) = \alpha\}$$

Alors B est un ensemble fermé, non vide et majoré par v. On peut donc définir

$$u = \sup\{x \in B\}$$

On a alors $u < v$ et $f([u, v]) = [\alpha, \beta]$. Le segment $L = [u, v]$ convient donc.

– Le cas $a > b$ se traite de la même manière en considérant cette fois $u = \max\{x \in [a, b]; f(x) = \beta\}$, puis $v = \min\{x \in [u, a]; f(x) = \alpha\}$. ■

On a ensuite besoin du lemme suivant :

Lemme 2

Supposons qu'il existe n segments $I_0, ..., I_{n-1}$ tels que l'on ait le cycle

$$I_0 \to I_1 \to ... \to I_{n-1} \to I_0$$

Alors, f^n admet un point fixe $x_0 \in I_0$ tel que, pour tout $k \in \{0, ..., n-1\}$, $f^k(x_0) \in I_k$.

Démonstration :

- Pour $n = 1$, on dispose par hypothèse d'un segment $I_0 = [a, b]$ tel que $I_0 \subset f(I_0)$. En particulier, il existe α et β dans I_0 tels que $f(\alpha) = a$ et $f(\beta) = b$. La fonction $g(x) = f(x) - x$ prend alors des valeurs de signes opposés en α et β ($g(\alpha) = a - \alpha < 0$ et $g(\beta) = b - \beta > 0$), et comme elle est continue, s'annule par le théorème des valeurs intermédiaires. On en déduit l'existence d'un point fixe dans l'intervalle I_0.
- Pour $n = 2$. On a $I_0 \subset f(I_1)$ et $I_1 \subset f(I_0)$. D'après le lemme précédent, il existe un segment $J_1 \subset I_0$ tel que $f(J_1) = I_1$. On a alors $J_1 \subset I_0 \subset f(I_1) = f^2(J_1)$. Le cas $n = 1$ assure alors l'existence d'un point fixe $x_0 \in J_1 \subset I_0$ de f^2. Et celui-ci vérifie bien $f(x_0) \in I_1$.
- Passons désormais au cas général. On va appliquer la même démarche. Comme on a $I_1 \subset f(I_0)$, on peut choisir un segment $J_1 \subset I_0$ tel que $f(J_1) = I_1$. On a alors $I_2 \subset f(I_1) = f^2(J_1)$. Donc, il existe $J_2 \subset J_1$ tel que $I_2 = f^2(J_2)$. Et de proche en proche, on construit ainsi une suite finie de segments $J_{n-1} \subset ... \subset J_2 \subset J_1 \subset I_0$ telle que $f^k(J_k) = I_k$ pour tout $k \in \{1, ..., n-1\}$. On a enfin $I_0 \subset I_{n-1} = f^n(J_{n-1})$ de sorte qu'il existe $J_n \subset J_{n-1}$ tel que $f^n(J_n) = I_0$. Comme $J_n \subset f^n(J_n)$, f^n admet un point fixe $x_0 \in J_n$. Par construction des intervalles J_k, $f_k(x_0) \in I_k$ pour tout $k \in \{0, ..., n-1\}$. ■

Passons maintenant à la preuve du théorème de Sarkowski. Par hypothèse, f admet un point 3-périodique a. Posons $b = f(a)$ et $c = f(b) = f^2(a)$. Il est facile de vérifier que les points b et c sont aussi 3-périodiques. On peut alors supposer, quitte à remplacer a par b ou c, que $a = \min(a, b, c)$. Deux éventualités se présentent alors selon la disposition de b et c.

- Supposons tout d'abord $a < b < c$ et posons $I_0 = [a, b]$ et $I_1 = [b, c]$. Comme $f(a) = b$ et $f(b) = c$, on a d'après le théorème des valeurs intermédiaires $I_1 \subset f(I_0)$, c'est à dire $I_0 \to I_1$. De la même manière, on a aussi, $I_1 \to I_0$ et $I_1 \to I_1$. Cette dernière inclusion montre déjà que f admet un point fixe dans I_1. De même, le cycle $I_0 \to I_1 \to I_0$ montre que f^2 admet un point fixe $x_0 \in I_0$ tel que $f(x_0) \in I_1$. Comme x_0 ne peut pas être égal à b (puisque b est 3-périodique), on a $x_0 \notin I_1$ ($I_1 \cap I_0 = \{b\}$ et $x_0 \in I_0$) et donc $f(x_0) \neq x_0$. Ainsi, x_0 est un point 2-périodique. Soit maintenant $n \geq 4$. On écrit le cycle $I_0 \to I_1 \to I_1 \to ... \to I_1 \to I_0$, où l'intervalle I_1 figure $n-1$ fois. D'après le lemme précédent, f^n admet un point fixe $x \in I_0$ tel que $f^k(x) \in I_1$ pour $k < n$. Comme précédemment x ne peut pas être égal à b et est donc un point n-périodique.
- Regardons maintenant le cas où $a < c < b$. On pose $I_0 = [a, c]$ et $I_1 = [c, b]$. On a cette fois $I_1 \to I_0$, $I_0 \to I_0$ et $I_0 \to I_1$. On peut donc reprendre le raisonnement précédent en échangeant les rôles de I_0 et I_1.

On a donc montré dans tous les cas que f admet des points n-périodiques pour tout $n \geq 1$. ■