Développement: théorème de Stampacchia

Adrien Fontaine

8 octobre 2013

Référence : Breizis, théorème V.6p83 et pages 136-137 pour les applications

Théorème 1 (***Théorème de Stampacchia***)

Soit $a : H \times H \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire. On suppose que a est continue, i.e *:*

$$\exists C / \forall u, v \in H, \mid a(u,v) \mid \leq C\|u\|\|v\|$$

et coercive, i.e

$$\exists \alpha > 0, \forall v \in H, a(v,v) \geq \alpha\|v\|^2$$

Soit K un convexe, fermé et non vide.
Étant donné $\varphi \in H'$, il existe $u \in K$ unique tel que

$$\forall v \in K, a(u, v-u) \geq \varphi(v-u)$$

De plus, si a est symétrique, alors u est caractérisé par la propriété

$$u \in K$$
$$\frac{1}{2}a(u,u) - \varphi(u) = \min_{v \in K}\{\frac{1}{2}a(v,v) - \varphi(v)\}$$

Démonstration : Soit $\varphi \in H'$, d'après le théorème de représentation de Riesz-Fréchet, il existe un unique $f \in H$ tel que :

$$\forall v \in H, \varphi(v) = < f, v >$$

D'autre part, pour tout $u \in H$ fixé, l'application $v \mapsto a(u,v)$ est une forme linéaire continue sur H, donc grâce au théorème de représentation de Riesz-Fréchet, il existe un élément de H, noté Au, tel que $a(u,v) = < Au, v >, \forall v \in H$.
En utilisant l'unicité de Au, on montre facilement que A est un opérateur linéaire de H dans H.
De plus,

$$\begin{cases} < Au, u > & = a(u,u) \geq \alpha\|u\|^2 \\ \|Au\|^2 & = < Au, Au > = a(u, Au) \leq C\|u\|\|Au\| \end{cases}$$

donc,

$$\begin{cases} \|Au\| & \leq C\|u\| \\ < Au, u > & \geq \alpha\|u\|^2 \end{cases}$$

Ramenons désormais l'inégalité de l'énoncé du théorème de Stampacchia à un problème de point fixe.

On a d'après le travail préliminaire qui vient d'être fait :

$$\begin{aligned}
&\exists! u \in K, \forall v \in K, a(u, v-u) \geq \varphi(v-u) \\
&\Leftrightarrow \exists! u \in K, \forall v \in K, < Au, v-u > \geq < f, v-u > \\
&\Leftrightarrow \exists! u \in K, \forall v \in K, \forall \rho > 0, < \rho f - \rho Au + u - u, v-u > \leq 0 \\
&\Leftrightarrow \exists! u \in K, \forall \rho > 0, u = p_K(\rho f - \rho Au + u
\end{aligned}$$

Pour tout $v \in K$, on pose $S(v) = p_K(\rho f - \rho Av + v)$. On s'est donc ramené à un problème de point fixe. Montrons que si $\rho > 0$ est convenablement choisi, alors S est une contraction stricte, i.e il existe $k < 1$ tel que

$$\forall v_1, v_2 \in K, \|S(v_1) - S(v_2)\| \leq k\|v_1 - v_2\|$$

La projection sur un convexe fermé est 1-Lipschitzienne donc,

$$\|S(v_1) - S(v_2)\| \leq \|(v_1 - v_2) - \rho(A(v_1 - v_2))\|$$

et donc,

$$\begin{aligned}
\|S(v_1) - S(v_2)\|^2 &\leq \|v_1 - v_2\|^2 - 2\rho < A(v_1 - v_2), v_1 - v_2 > +\rho^2\|A(v_1 - v_2)\|^2 \\
&\leq (1 - 2\rho\alpha + \rho^2 C^2)\|v_1 - v_2\|^2
\end{aligned}$$

Si on prend alors $\rho = \frac{\alpha}{C^2}$ par exemple, on a :

$$\|S(v_1) - S(v_2)\|^2 \leq \underbrace{(1 - \frac{\alpha^2}{C^2})}_{<1} \|v_1 - v_2\|^2$$

De plus, K étant fermé dans H complet, K est complet et S va de K dans lui même, donc S admet un unique point fixe. D'où le résultat.
Supposons maintenant que $a(u, v)$ est symétrique. Alors $a(u, v)$ définit un produit scalaire sur H (c'est défini positif par coercitivité de a) et la norme associée $a(u, u)^{1/2}$ est équivalente à la norme $\|.\|$ issue du produit scalaire usuel ($\alpha\|u\|^2 \leq a(u, u) \leq C\|u\|^2$). Donc, H est aussi un espace de Hilbert pour ce produit scalaire. Appliquant le théorème de représentation de Riesz-Fréchet, on obtient $g \in H$ tel que

$$\forall v \in H, \varphi(v) = a(g, v)$$

L'inégalité du théorème de Stampacchia devient alors

$$\forall v \in K, a(u, v-u) \geq a(g, v-u)$$

soit

$$\forall v \in K, a(g-u, v-u) \leq 0 \tag{1}$$

i.e $u = p_K(g)$ où p_K est la projection au sens du produit scalaire défini par a. D'après le théorème de projection sur un convexe fermé, (1) équivaut donc à trouver $u \in K$ tel que

$$a(g-u, g-u)^{1/2} = \min_{v \in K} a(g-v, g-v)^{1/2}$$

Ceci revient à minimiser sur K, $a(g-v, g-v)$, ou encore $a(v, v) - 2a(g, v)$, ou encore

$$\frac{1}{2}a(v, v) - \varphi(v)$$

■

Corollaire 1 (***Lax-Milgram***)

Soit $a(u,v)$ une forme bilinéaire continue et coercive. Alors pour tout $\varphi \in H'$, il existe $u \in H$ unique tel que

$$\forall v \in H, a(u,v) = \varphi(v)$$

De plus, si a est symétrique, alors u est caractérisé par la propriété

$$u \in H \text{ et } \frac{1}{2}a(u,u) - \varphi(u) = \min_{v\in H}\{\frac{1}{2}a(v,v) - \varphi(v)\}$$

Le théorème de Lax-Milgram est un outil fondamental dans l'étude de certaines équations aux dérivées partielles (souvent utilisé dans sa version symétrique). Le théorème de Stampacchia généralise le théorème de Lax-Milgram. Il peut aussi s'obtenir directement à partir de la théorie hilbertienne.

Applications des théorèmes de Stampacchia et Lax-Milgram

Soit $I =]0,1[$. On rappelle la définition de l'espace de Sobolev (c'est un espace de Hilbert) :

Définition 1

$$H_0^1(I) = \{u \in L^2(I)/\exists g \in L^2(I) \text{ tel que } \int_I u\varphi' = -\int_I g\varphi, \forall \varphi \in C_0^\infty(I) \text{ et } u(0) = u(1) = 0\}$$

$$H^1(I) = \{u \in L^2(I)/\exists g \in L^2(I) \text{ tel que } \int_I u\varphi' = -\int_I g\varphi, \forall \varphi \in C_0^\infty(I)\}$$

Soit à résoudre le problème

$$\begin{cases} -u'' + u & = f \text{ sur } I =]0,1[\\ u(0) = u(1) & = 0 \end{cases} \tag{2}$$

où f est une fonction donnée (par exemple dans $C(\bar{I})$ ou $f \in L^2$). La condition aux limites $u(0) = u(1) = 0$ s'appelle la condition de Dirichlet homogène.

Définition 2

Une solution classique de (2) est une fonction $u \in C^2(\bar{I})$ vérifiant (2) au sens usuel. Une solution faible de (2) est une fonction $u \in H_0^1(I)$ qui vérifie

$$\int_0^1 u'\varphi' + \int_0^1 u\varphi = \int_0^1 f\varphi, \forall \varphi \in H_0^1(I) \tag{3}$$

Remarque 1

Toute solution classique est une solution au sens faible (vérification facile en multipliant par φ et en intégrant par parties).

Pour établir l'existence de solution au problème (2), on montre l'existence d'une solution au sens faible, puis on montre que cette solution faible est de classe C^2 et qu'une solution faible de classe C^2 est une solution classique. Pour montrer l'existence d'une solution faible, on utilise le théorème de Lax-Milgram :

Proposition 1

Pour tout $f \in C([0,1])$, il existe $u \in C^1(\bar{I})$ unique solution de (3).

Démonstration : On applique le théorème de Lax-Milgram dans l'espace de Hilbert $H = H_0^1(I)$ avec la forme bilinéaire

$$a(u,v) = \int u'v' + \int uv$$

et la forme linéaire $\varphi(v) = \int fv$. ■

Un problème se pose alors, lorsque les conditions de Dirichlet ne sont plus homogène :

$$\begin{cases} -u'' + u = f \text{ sur } I =]0,1[\\ u(0) = \alpha, u(1) = \beta \end{cases} \tag{4}$$

En effet, on ne peut plus se placer dans H_0^1. C'est ici que l'on utilise le théorème de Stampacchia plus général que le théorème de Lax-Milgram.

Proposition 2

Étant donné $f \in L^2(I)$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, il existe $u \in H^1(I)$ unique vérifiant (4).

Démonstration : Dans l'espace H^1, on introduit le convexe fermé

$$K = \{v \in H^1(I)/v(0) = \alpha, v(1) = \beta\}$$

Si u est une solution classique de (4), on a :

$$\forall v \in K, \int_I u'(v-u)' + \int_I u(v-u) = \int_I f(v-u)$$

Donc, en particulier on a

$$\forall vinK, \int_I u'(v-u)' + \int_I u(v-u) \geq \int_I f(v-u) \tag{5}$$

On utilise alors le théorème de Stampacchia : il existe $u \in K$ unique solution de (5). ■