Développement: Théorème de structure des polynômes symétriques

Adrien Fontaine

3 avril 2013

Référence : Ramis-Deschamps, Odoux, Cours de Mathématiques spéciales, Algèbre 1, p200

1 Préliminaires

Définition 1 (*poids*)

Si $P = \sum_{i \in \mathbb{N}^n} a_i Y_1^{i_1} ... Y_n^{i_n}$, alors on définit le poids de P et on note $\Pi(P)$:

$$i(P) = \max\{i / a_i \neq 0, \sum_{k=1}^{n} k i_k = m\}$$

Si P est nul, on convient $\pi(P) = -\infty$.

Proposition 1

Si $P \in A[Y_1, ..., Y_n]$ est de poids $\Pi(P)$, alors $P(\Sigma_1, ..., \Sigma_n)$ est de degré au plus $\Pi(P)$.

Théorème 1

Soit P un polynôme symétrique de $A[X_1, ..., X_n]$. P a même degré partiel par rapport à chaque indéterminée. Ce degré partiel s'appelle ordre de P et est noté $\omega(P)$.

Démonstration : Si $P = 0$, il n'y a rien à démontrer.

Sinon, si $p_1 = deg_{X_1}(P)$, alors P "contient" le monôme $X_1^{p_1} ... X_n^{p_n}$. En appliquant la transposition $\tau = (1, i)$, on voit que P contient également le monôme $a_p X_i^{p_1} ... X_{\tau(n)}^{p_n}$, donc $deg_{X_i}(P) \geq p_1 = deg_{X_1}(P)$.

De même, on montre que $deg_{X_1}(P) \geq deg_{X_i}(P)$. ∎

Proposition 2

Si $P \in A[Y_1, ..., Y_n]$ est de degré k, le polynôme symétrique $P(\Sigma_1, ..., \Sigma_n)$ de $A[X_1, .., X_n]$ est d'ordre $\leq k$.

2 Structure des polynômes symétriques

Nous aurons à utiliser le lemme suivant :

Lemme 1

Soit $P \in A[X_1, ..., X_n]$ tel qu'en substituant 0 à l'une quelconque des indéterminées dans

$P(X_1,...,X_n)$, on obtienne le polynôme nul. Alors P est divisible par $\Sigma_n = X_1...X_n$.

Démonstration : Posons $P = \sum_{i\in\mathbb{N}^n} a_i X_1^{i_1}...X_n^{i_n}$.

Pour tout $1 \leq k \leq n$, associons l'ensemble I_k des n-uplets $i = (i_1,...,i_n)$ de $\mathbb{N}^n$ tels que $i_k = 0$. On a l'égalité des polynômes

$$0 = P(X_1,...,X_{k-1},0,X_{k+1},...,X_n) = \sum_{i\in I_k} a_i X_1^{i_1}...X_{k-1}^{i_{k-1}} X_{k+1}^{i_{k+1}}...X_n^{i_n}$$

Donc, $\forall i \in I_k, a_i = 0$.

En faisant varier k entre 1 et n, on en déduit que a_i est nul pour tout n-uplet i dont l'une des coordonnées est nulle. Autrement dit, $a_i \neq 0$ implique $i \in (\mathbb{N}^*)^n$ et donc on peut écrire

$$P = \sum_{i\in(\mathbb{N}^*)^n} a_i X_1^{i_1}...X_n^{i_n} = X_1...X_n \sum_{i\in(\mathbb{N}^*)^n}$$ ■

Théorème 2

A tout polynôme $P \in A[X_1,...,X_n]$ symétrique, de degré p, on peut associer un polynôme $Q \in A[Y_1,...,Y_n]$ de poids inférieur ou égal p tel que $P(X_1,...,X_n) = Q(\Sigma_1,...,\Sigma_n)$.

Démonstration : Si $P = 0$, alors $Q = 0$ fonctionne.

Il s'agit de vérifier une assertion de la forme $\mathcal{A}_{n,p}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$. On va pour cela utiliser une double récurrence.

$\mathcal{A}_{n,p} : \forall P \in A[X_1,...,X_n]^{\mathfrak{S}_n}/deg(P) = p, \exists Q \in A[X_1,...,X_n]/\Pi(Q) \leq p \wedge P(X_1,..,X_n)Q(\sigma_1,...,\sigma_n)$

- $\mathcal{A}_{1,p}$ est vraie pour tout p : à tout polynôme $P(X_1)$, on peut associer $Q = P$.
- Soit $n \geq 2$. On suppose que $\mathcal{A}_{n-1,p}$ est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}$. Montrons par récurrence sur p que $\mathcal{A}_{n,p}$ est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}$.
  - $\mathcal{A}_{n,0}$ est évidemment vraie.
  - Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $\mathcal{A}_{n,k}$ est vraie pour tout $k < p$, et soit $P \in A[X_1,...,X_n]^{\Sigma_n}$ tel que $deg(P) = p$.

    Notons pour $1 \leq g \leq n-1$, $(\Sigma_q)_0$ le polynôme obtenu en substituant 0 à X_n dans Σ_q. On a :

    $$\Sigma_q = \sum_{1\leq i_1<...<i_n\leq n} X_{i_1}...X_{i_q}$$

    Donc,

    $$(\Sigma_q)_0 = \sum_{1\leq i_1<...<i_n\leq n-1} X_{i_1}...X_{i_q}$$

    Autrement dit, $(\Sigma_q)_0$ n'est autre que le q-ième polynôme symétrique élémentaire de $A[X_1,...,X_{n-1}]$. Considérons alors $P(X_1,...,X_{n-1},0)$. Il est symétrique, de degré au plus p. En utilisant $\mathcal{A}_{n-1,p}$, on peut écrire :

    $$P(X_1,...X_{n-1},0) = Q_1((\Sigma_1)_0,...,(\Sigma_{n-1})_0)$$

    où $Q_1 \in A[X_1,...,X_{n-1}]$ est de poids au plus p.

    Posons $P_1(X_1,...,X_n) = P(X_1,...,X_n) - Q_1(\Sigma_1,...,\Sigma_{n-1})$.

    Alors, P_1 est symétrique, de degré au plus p, et par construction $P_1(X_1,...,X_{n-1},0) = 0$.

    Par ailleurs, puisque P_1 est symétrique, pour tout $1 \leq k \leq n$, $P_1(X_1,...,X_{k-1},0,X_k,...,X_n) = 0$. Donc, d'après le lemme, il existe $P_2 \in A[X_1,...,X_n]$ tel que :

    $$P_1(X_1,...,X_n) = \Sigma_n P_2(X_1,...,X_n)$$

P_1 et Σ_n sont symétriques, soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on a :

$$\Sigma_n(P_2(X_1, ..., X_n) - P_2(X_{\sigma(1)}, ..., X_{\sigma(n)})) = 0$$

D'où, $P_2(X_1, ..., X_n) = P_2(X_{\sigma(1)}, ..., X_{\sigma(n)})$.
De plus, $deg(P_2) \leq p - n$.
Ainsi, P_2 est symétrique, de degré k tel que $k < p$. Appliquons à P_2 l'hypothèse de récurrence sur p,

$$P_2(X_1, ..., X_n) = Q_2(\Sigma_1, ..., \Sigma_n)$$

où $Q_2 \in A[X_1, ..., X_n]$ et où Q_2 est de poids au plus $p - n$. Il vient

$$P(X_1, ..., X_n) = Q_1(\sigma_1, ..., \sigma_{n-1}) + \Sigma_n Q_2(\Sigma_1, ..., \Sigma_n)$$

Le polynôme $Q_1(Y_1, ..., Y_{n-1}) + Y_n Q_(Y_1, ..., Y_n)$ est de poids au plus p et répond manifestement à la question. ■

Remarque 1

- *La preuve fournit un algorithme pour calculer Q.*
- *On peut même ajouter dans ce théorème que Q est de degré inférieur ou égal à l'ordre $\omega(P)$ de P, en rajoutant cette propriété à l'assertion $\mathcal{A}_{n,p}$.*
- *On a aussi unicité : il suffit de vérifier que si $Q \in A[Y_1, ..., Y_n]$ est tel que $Q(\Sigma_1, ..., \Sigma_n) = 0$, alors $Q = 0$. Ce qui se fait par récurrence.[1].*