Développement: théorème des extrema liés

Adrien Fontaine

27 octobre 2012

Théorème 1 (***Extrema liés***)

Soient $f, g_1, ..., g_r : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ des fonctions de classe C^1, où U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On désigne par Γ l'ensemble $\{x \in U / g_1(x) = ... = g_r(x) = 0\} := \Gamma$. Si $f_{|\Gamma}$ (restriction de f à Γ) admet un extremum relatif en $a \in \Gamma$ et si les formes linéaires $dg_{1,a}, ..., dg_{r,a}$ sont linéairement indépendantes, alors il existe des réels $\lambda_1, ..., \lambda_r$ (appelés multiplicateurs de Lagrange) tels que

$$df_a = \lambda_1 dg_{1,a} + ... + \lambda_r dg_{r,a}$$

Pour démontrer ce théorème, on a besoin du théorème des fonctions implicites :

Théorème 2 (***Fonctions implicites***)

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^r$, (a,b) un point de U, et $f : (x,y) \mapsto f(x,y)$ une application de classe C^1 de U dans $\mathbb{R}^r$. On suppose que $f(a,b) = 0$ et que la matrice jacobienne $D_y f(a,b)$ formée des dérivées partielles par rapport à y, est inversible, i.e $det(D_y f(a,b)) \neq 0$.
Alors l'équation $f(x,y) = 0$ peut être résolue localement par rapport aux variables y : il existe V (voisinage ouvert de a dans $\mathbb{R}^s$), W (voisinage ouvert de b dans $\mathbb{R}^r$), avec $V \times W \subset U$ et $D_y f(x,y)$ inversible pour tout $(x,y) \in V \times W$, et une unique application $\varphi : V \to W$ telle que :

$$(x \in V, y \in W \text{ et } f(x,y) = 0) \Leftrightarrow (x \in V \text{ et } y = \varphi(x))$$

De plus, φ est de classe C^1.

Démonstration : voir Rouvière p259 ■

On peut maintenant démontrer le théorème des extrema liés :

Démonstration : Soit $s = n - r$. On identifie $\mathbb{R}^n$ à $\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^r$. On écrit les éléments de $\mathbb{R}^n$ sous la forme $(x,y) = (x_1, ..., x_s; y_1, ..., y_r)$. Écrivons $a = (\alpha, \beta)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^s$, $\beta \in \mathbb{R}^r$.
Les $dg_{i,a}$ forment une famille libre du dual de $\mathbb{R}^n$ qui est de dimension n, donc $r \leq n$.
De plus, si $r = n$ alors les $dg_{i,a}$ forment une base du dual de $\mathbb{R}^n$ et donc le résultat est évident.
Supposons donc $r \leq n - 1$.
Les formes linéaires $(dg_{i,a})_{1 \leq i \leq r}$ forment une famille libre, donc la matrice

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_s}(a) & \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(a) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_r}(a) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_r}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial g_r}{\partial x_s}(a) & \frac{\partial g_r}{\partial y_1}(a) & \cdots & \frac{\partial g_r}{\partial y_r}(a) \end{bmatrix}$$

est de rang r. On peut donc en extraire une sous-matrice inversible de taille r. Quitte à changer le nom des variables, on peut supposer que

$$det(\frac{\partial g_i}{\partial y_j}(a))_{1 \leq i,j \leq r} \neq 0$$

D'après le théorème des fonctions implicites, on peut donc trouver un voisinage ouvert U' de α dans $\mathbb{R}^s$, un voisinage V' de β dans $\mathbb{R}^r$ et une fonction $\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_r) : U' \to V'$ de classe C^1 tels que (en notant $g = (g_1, ..., g_r)$)

$$(g(x,y) = 0, \text{ avec } x \in U' \text{ et } y \in V') \Leftrightarrow (x \in U' \text{ et } y = \varphi(x))$$

En d'autres termes, sur un voisinage de a, les éléments de $\Gamma = \{z/g(z) = 0\}$ s'écrivent $(x, \varphi(x))$.
Posons $h(x) = f(x, \varphi(x))$.
On a par ailleurs, $(\alpha, \varphi(\alpha)) = a$ et $(x, \varphi(x)) \in \Gamma$ donc h admet un extremum local en $x = \alpha$. En dérivant coordonnées par coordonnées, on obtient :

$$\forall 1 \leq i \leq s, 0 = \frac{\partial h}{\partial x_i}(\alpha) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(\alpha)\frac{\partial f}{\partial y_j}(a) \tag{1}$$

Par ailleurs, en écrivant les dérivées partielles par rapport aux x_i de $g(x, \varphi(x)) = 0$, on tire

$$\forall 1 \leq k \leq r, \forall 1 \leq i \leq s, 0 = \frac{\partial g_k}{\partial x_i}(a) + \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(\alpha)\frac{\partial g_k}{\partial y_j}(a) \tag{2}$$

Autrement dit, les s premières colonnes de la matrice

$$M = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_s}(a) & \frac{\partial f}{\partial y_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial y_r}(a) \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_s}(a) & \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(a) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_r}(a) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_r}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial g_r}{\partial x_s}(a) & \frac{\partial g_r}{\partial y_1}(a) & \cdots & \frac{\partial g_r}{\partial y_r}(a) \end{bmatrix}$$

s'expriment d'après **??** et **??**, linéairement en fonction de ses r derniers vecteurs colonnes. Donc, $rg(M) \leq r$. Or, le rang des vecteurs lignes est égal au rang des vecteurs colonnes (car $rg(M^t) = rg(M)$), donc les $r+1$ premiers vecteurs lignes de M forment une famille liée, ce qui entraîne l'existence de réels $\mu_0, ..., \mu_r$ non tous nuls tels que $\mu_0 df_a + \mu_1 dg_{1,a} + ... + \mu_r dg_{r,a} = 0$. Comme la famille $(dg_{i,a})_{1 \leq i \leq r}$ est libre, on a $\mu_0 \neq 0$, et en posant $\lambda_i = \frac{-\mu_i}{\mu_0}$ pour $1 \leq i \leq r$, on en déduit

$$df_a = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i dg_{i,a}$$

D'où le théorème. ■