Développement: Théorèmes de Paley-Wiener

Adrien Fontaine

2 juillet 2014

Référence : W.Rudin, théorème 19.2p419 pour le développement et p422 à 428 pour le paragraphe sur les classes quasi-analytiques.
C.Zuily, Distributions et équations aux dérivées partielles, pour le théorème de Paley-Wiener Schwartz et l'application à l'équation des ondes

1 Développement

On désigne par Π^+ l'ensemble $\{z \in \mathbb{C}/Im(z) > 0\}$ [1].

Théorème 1

Soit f une fonction définie sur Π^+ à valeurs complexes. Alors,
$f \in H(\Pi^+)$ et

$$\sup_{0<y<+\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+iy)|^2 dx = C < +\infty$$

si, et seulement si,
il existe $F \in L^2(\mathbb{R})$ telle que $F \equiv 0$ sur $]-\infty, 0[$ et

$$\forall z \in \Pi^+, f(z) = \int_0^{+\infty} F(t)e^{itz} dt \tag{1}$$

Démonstration : 1. *sens indirect* Montrons que f est holomorphe sur Π^+.

— $\forall z \in \Pi^+, t \mapsto F(t)e^{itz}$ est mesurable
— $\forall t \in]0, +\infty[, z \mapsto F(t)e^{itz}$ est holomorphe sur Π^+
— Soit K un compact de Π^+. Alors il existe $\delta > 0$ tel que $\forall \in K, Im(z) > \Delta$. On a alors

$$\forall t \in]0, +\infty[\forall z \in K, |F(t)e^{itz}| \leq \underbrace{|F(t)|}_{\in L^2} \underbrace{e^{-\delta t}}_{\in L^2} \in L^1$$

d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Donc d'après le théorème d'holomorphie sous le signe intégrale, f est holomorphe sur Π^+.
Récrivons maintenant (1) sous la forme,

$$f(x+iy) = \int_0^{+\infty} F(t)e^{-ty}e^{itx} dt$$

1. ou demi-plan de Poincarré pour les intimes

Considérons y comme fixé. On a alors d'après le théorème de Plancherel,

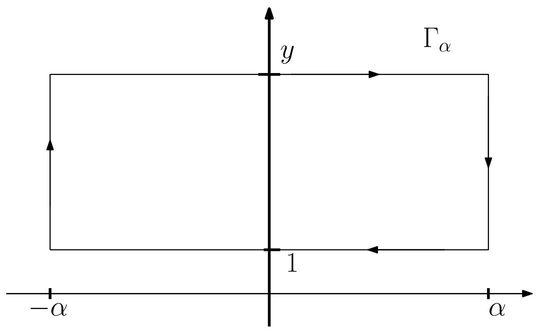
$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x+iy)|^2dx &= \int_0^{+\infty}|F(t)|^2e^{-2ty}dy\\ &\leq \int_0^{+\infty}|F(t)|^2dt\end{aligned}$$

Donc, les restriction de f aux droites horizontales de Π^+ constituent un sous ensemble borné de $L^2(]-\infty,+\infty[)$.

2. *sens direct* La fonction F que nous recherchons doit posséder la propriété suivante : $f(x+iy)$ est la transformée de Fourier de $F(t)e^{-yt}$ (où y est considéré comme une constante strictement positive).
Si on utilise la formule d'inversion, la fonction F souhaitée devra être de la forme

$$\begin{aligned}F(t) &= e^{ty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x+iy)e^{-itx}dx\\ &= \frac{1}{2\pi}\int f(z)e^{-itz}dz\end{aligned}$$

où la dernière intégrale est prise sur une droite horizontale de Π^+. La valeur de cette intégrale ne doit pas dépendre du choix d'une droite particulière, ce qui suggère un appel au théorème de Cauchy.
Soit y fixé tel que $0 < y < +\infty$. On va supposer pour simplifier que $y > 1$ (le cas $0 < y < 1$ étant totalement symétrique). On note $I = [1, y]$. Soit également $t \in \mathbb{R}$. Pour tout $\alpha > 0$, on définit Γ_α comme le chemin rectangulaire dont les sommets sont $\pm\alpha + i$ et $\pm\alpha + iy$:



D'après le théorème de Cauchy, on a :

$$\begin{aligned}0 &= \int_{\Gamma_\alpha}f(z)e^{-itz}dz\\ &= \int_{-\alpha}^{+\alpha}f(x+iy)e^{-it(x+iy)}dx - \int_{-\alpha}^{+\alpha}f(x+i)e^{-it(x+i)}dx\\ &- \int_I f(\alpha+iu)e^{-it(\alpha+iu)}du + \int_I f(-\alpha+iu)e^{-it(-\alpha+iu)}du\end{aligned}$$

Pour montrer que l'intégrale $\int f(z)e^{-itz}dz$ rencontrée plus tôt, ne dépend pas de la droite sur laquelle on la considère, on va montrer que les deux intégrales sur les segments verticaux tendent vers 0 quand α tend vers l'infini et que les intégrales sur les segments horizontaux sont convergentes quand α tend vers l'infini.
Pour cela on introduit

$$\Phi(\alpha) = \int_{[\alpha+i,\alpha+iy]}f(z)e^{-itz}dz$$

qui correspond à l'intégrale sur le segment vertical.
Alors,

$$\begin{aligned} |\Phi(\alpha)|^2 &= |\int_I f(\alpha+iu)e^{-it(\alpha+iu)}du|^2 \\ &\leq \int_I |f(\alpha+iu)|^2 du \times \int_I e^{2tu}du \text{ d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz} \end{aligned}$$

Définissons maintenant

$$\Lambda(\alpha) = \int_I |f(\alpha+iu)|^2 du$$

A défaut de montrer que $\Lambda(\alpha)$ tend vers 0 quand α tend vers l'infini, on va montrer qu'il existe une suite de points $(\alpha_j) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ tendant vers l'infini, et telle que $\Lambda(\alpha_j)$ tend vers 0. Il suffit pour cela de montrer que Λ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Or, on a :

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{+\infty} \Lambda(\alpha)d\alpha \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (\int_I |f(\alpha+iu)|^2 du)d\alpha \\ &= \int_I (\int_{-\infty}^{+\infty} |f(\alpha+iu)|^2 d\alpha)du \text{ par Fubini-Tonelli} \\ &\leq 2\pi C\lambda(I) \end{aligned}$$

où λ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.
Il existe donc une suite $(\alpha_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ telle que $\alpha_j \to +\infty$ et

$$\begin{cases} \Lambda(\alpha_j) & \to 0 \\ \Lambda(-\alpha_j) & \to 0 \end{cases}$$

Comme

$$|\Phi(\alpha)|^2 \leq \Lambda(\alpha) \times \int_I e^{2u} du$$

On a :

$$|\Phi(\alpha_j)| \leq \Lambda(\alpha_j) \times \int_I e^{2u} du$$

D'où,

$$\begin{cases} \Phi(\alpha_j) & \to 0 \\ \Phi(-\alpha_j) & \to 0 \end{cases}$$

On remarque par ailleurs, que ceci a lieu pour tout t et que la suite (α_j) ne dépend pas de t.
On va maintenant montrer que les intégrales sur les segments horizontaux sont convergentes.
Pour cela on va utiliser le théorème de Plancherel.
On pose alors :

$$g_j(y,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha_j}^{+\alpha_j} f(x+iy)e^{-itx}dx$$

Alors,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_{\alpha_j}} f(z)e^{-itz}dz \\ &= g_j(y,t)e^{ty} - e^t g_j(1,t) + \underbrace{\frac{1}{2\pi}\left[\Phi(\alpha_j) + \Phi(-\alpha_j)\right]}_{\to 0} \end{aligned}$$

Donc,

$$\lim_{j\to+\infty}\left[e^{ty}g_j(y,t)-e^{t}g_j(1,t)\right]=0 \tag{2}$$

et ce pour tout $t\in\mathbb{R}$.
Notons $f_y(x)$ au lieu de $f(x+iy)$. Par hypothèse, $f_y\in L^2(\mathbb{R})$. Donc, d'après le théorème de Plancherel,

$$\lim_{j\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|\hat{f}_y(t)-g_j(y,t)|^2dt=0$$

Donc, il existe une sous-suite de $(g_j(y,t))_{j\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $\hat{f}_y(t)$ pour presque tout t.
On pose

$$F(t)=e^t\hat{f}_1(t)$$

Il reste à vérifier que

$$\begin{cases} F & \equiv 0 \text{ sur }]-\infty,0[\\ F & \in L^2(\mathbb{R}) \\ F(z) & =\int_0^{+\infty}F(t)e^{itz}dt \end{cases}$$

Grâce à (2), on a alors pour tout $0<y<+\infty$ et pour presque tout t :

$$F(t)=e^{yt}\hat{f}_y(t)$$

On applique alors le théorème de Plancherel :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2ty}|F(t)|^2dt &= \int_{-\infty}^{+\infty}|\hat{f}_y(t)|^2dt &(3)\\ &=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|f_y(x)|^2dx\leq C &(4)\end{aligned}$$

Si on fait tendre y vers $+\infty$ dans (3), on a grâce au lemme de Fatou, $F(t)=0$ presque partout sur $]-\infty,0[$.
Par ailleurs, si on fait tendre y vers 0 dans (3), on obtient grâce au théorème de convergence monotone

$$\int_0^{+\infty}|F(t)|^2dt\leq C$$

Enfin,

$$\hat{f}_y(t)=\underbrace{e^{-ty}}_{\in L^2}\underbrace{F(t)}_{\in L^2}\in L^1$$

Donc, $\hat{f}_y\in L^1$.
Comme $f_y\in L^2$, on peut appliquer le théorème d'inversion :

$$f_y(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}_y(t)e^{itx}dt$$

ou encore

$$\begin{aligned}f(z)&=\int_0^{+\infty}F(t)e^{-yt}e^{itx}dt\\ &=\int_0^{+\infty}F(t)e^{itz}dt\end{aligned}$$

■

2 Autres théorèmes de Paley-Wiener

2.1 Fonction entière

Il existe un autre théorème de Paley-Wiener dont la démonstration est très similaire à celle présentée ci-dessus (à la suite dans le Rudin).

Théorème 2 (*Deuxième théorème de Paley-Wiener*)

Soit $0 < A < +\infty$ et f une fonction définie sur $\mathbb{C}$. Alors,
f est une fonction entière dont la restriction à l'axe réel appartient à L^2 et

$$\exists C > 0, |f(z)| \leq Ce^{A|z|}$$

si et seulement si, il existe une fonction $F \in L^2([-A, A])$ telle que pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$f(z) = \int_{-A}^{A} F(t)e^{itz}dt$$

Et alors, on peut prendre $C = \int_{-A}^{A} |F(t)|dt$.

Remarque 1 (*culturelle sur les classes quasi-analytiques*)

Lorsque Ω est un ouvert connexe non vide et $z_0 \in \Omega$, toute fonction holomorphe sur Ω est déterminée de façon unique par la suite $(f^{(n)}(z_0))_{n\in\mathbb{N}}$. Par ailleurs, il existe des fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}$ non identiquement nulles et qui pourtant s'annulent sur tout un intervalle. Une propriété d'unicité est donc possédée par les fonctions holomorphes mais est inexacte sur $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.
Lorsque f est holomorphe sur Ω, la croissance de $|f^{(n)}(z_0)|$ est gouvernée par les inégalités de Cauchy. Il est alors raisonnable de se demander si la propriété d'unicité ci-dessus a lieu pour des sous-familles convenable de $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ pour lesquelles la croissance des dérivées est soumise à certaines restrictions.
On définit alors la notion de classe quasi-analytique : c'est un ensemble de fonctions pour lesquelles la croissance des dérivées est contrôlée (d'une certaine façon que l'on ne précise pas ici) et qui possèdent la propriété d'unicité mentionnée ci-dessus. Le théorème de Denjoy-Carleman donne alors une série de conditions suffisantes sur la croissance des dérivées pour qu'une classe de fonction de $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ soit quasi-analytique. Sa démonstration fait appel au théorèmes de Paley-Wiener que l'on démontre dans ce développement.

2.2 Théorème de Paley-Wiener-Schwartz

Il existe également un théorème de Paley-Wiener qui donne une condition nécessaire et suffisante sur la décroissance à l'infini de la transformée de Fourier holomorphe, pour qu'une fonction soit à support compact. Laurent Schwartz a généralisé ce théorème pour donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une distribution soit à support compact. Une très jolie application de ce théorème est la preuve du fait que la solution de l'équation des ondes est à support dans le cône d'onde d'avenir $\{t \geq 0, \|x\| \leq t\}$ (penser aux vagues qui se propagent lorsque l'on jette un caillou dans l'eau !).