Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$

RIFFAUT Antonin

2013-2014

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi $\mathcal{B}\left(\{\pm 1\}, \frac{1}{2}\right)$. Pour $n \geq 1$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. La suite (S_n) modélise une marche aléatoire centrée sur $\mathbb{Z}$.

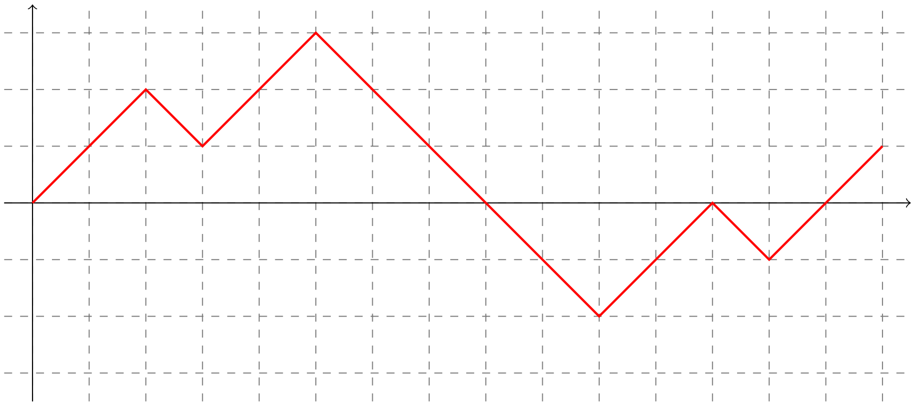

FIGURE 1 – Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$

On s'intéresse à la probabilité que la marche aléatoire revienne en 0, c'est-à-dire, en notant $T = \inf\{n \geq 1\,;\, S_n = 0\}$, à la probabilité $\mathbb{P}(T < \infty)$. L'objectif de ce développement est de montrer que $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$.

Pour $n \geq 0$, on pose $p_n = \mathbb{P}(S_n = 0)$ et $q_n = \mathbb{P}(T = n)$. On a $p_0 = 1$ et $q_0 = 0$. Introduisons également les séries génératrices $P = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n x^n$ et $Q = \sum_{n=0}^{+\infty} q_n x^n$ des suites (p_n) et (q_n) respectivement. En remarquant que $\mathbb{P}(T < \infty) = \sum_{n=0}^{+\infty} q_n = Q(1)$, il s'agit donc de déterminer $Q(1)$.

- Calculons explicitement p_n : pour tout $n \geq 0$, $S_{2n+1} \equiv 1 \mod 2$, donc $p_{2n+1} = 0$; d'autre part, pour que la marche aléatoire revienne en 0 après $2n$ mouvements, elle doit «monter» exactement n fois et «descendre» exactement n fois (cf. figure 1), d'où l'on déduit que

$$p_{2n} = \binom{2n}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{1}{2}\right)^n = \binom{2n}{n} \frac{1}{4^n}.$$

  La série entière P est de rayon de convergence au moins égal à 1, puisque pour tout $|x| < 1$, la suite $(p_n x^n)$ est bornée par 1. Par ailleurs, le calcul des p_n permet de reconnaître le développement en série entière de la fonction $x \in]-1,1[\longmapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, de sorte que

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \forall x \in]-1,1[.$$

- Nous allons à présent rechercher une relation de récurrence entre les suites (p_n) et (q_n), d'où l'on déduira une relation entre P et Q, puis l'expression de Q. Pour tout $n \geq 1$, on a

$$\begin{aligned}
p_n &= \mathbb{P}(S_n = 0) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(T = k,\, S_n = 0) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(T = k,\, X_{k+1} + \cdots + X_n = 0) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(T = k)\mathbb{P}(X_{k+1} + \cdots + X_n = 0),
\end{aligned}$$

la dernière égalité étant due à l'indépendance des événements $\{T = k\}$ et $\{X_{k+1}+\cdots+X_n = 0\}$. En outre, $X_{k+1} + \cdots + X_n$ est de même loi que S_{n-k}, d'où

$$p_n = \sum_{k=1}^{n} q_k p_{n-k}. \tag{1}$$

- Le même argument que précédemment garantit que la série entière Q est de rayon de convergence au moins égal à 1. La relation (1) nous invite à effectuer le produit de Cauchy de P par Q : pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\begin{aligned}
P(x)Q(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} q_k p_{n-k} \right) x^n \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} p_n x^n \\
&= P(x) - 1.
\end{aligned}$$

On en déduit finalement l'expression de Q : pour tout $x \in]-1,1[$,

$$Q(x) = 1 - \frac{1}{P(x)} = 1 - \sqrt{1 - x^2}.$$

On s'aperçoit donc que

$$\lim_{x \to 1^-} Q(x) = 1. \tag{2}$$

D'autre part, pour tout $n \geq 0$, pour tout $|x| < 1$, $|q_n x^n| \leq q_n$, et la série de terme général (q_n) converge vers $\mathbb{P}(T < \infty) \leq 1$ d'après le propos initial. Il s'ensuit que la série entière Q converge normalement sur $]-1,1[$, ce qui permet d'échanger limite et sommation :

$$\lim_{x \to 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} q_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} q_n = \mathbb{P}(T < \infty). \tag{3}$$

Les équations (2) et (3) établissent en conséquence que $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$.

- Complément : en développant la fonction $x \in]1,1[\longmapsto 1 - \sqrt{1-x^2}$ en série entière, on peut obtenir l'expression explicite des q_n :

$$q_{2n} = \binom{2n}{n} \frac{1}{4^n(2n-1)}, \quad \forall n \geq 1.$$