Nombres de Bell

Riffaut Antonin

2013-2014

Soit B_n le nombre de partitions de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$. Nous allons expliciter B_n comme somme d'une série numérique.

Dans un premier temps, pour $n \in \mathbb{N}$, nous allons établir une relation de récurrence entre B_{n+1} et les B_k, $k \leq n$. À cet effet, pour $k \leq n$, notons E_k l'ensemble des partitions de $\{1, \ldots, n+1\}$ dont la partie contenant $n+1$ est de cardinal $k+1$. Alors l'ensemble E des partitions de $\{1, \ldots, n+1\}$ est la réunion disjointe des E_k, $k \leq n$, si bien que

$$\operatorname{card} E = B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{card} E_k.$$

Un élément de E_k est déterminé par le choix de k entiers dans l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$, qui constituent, avec $n+1$, la partie contenant $n+1$ de cardinal k, et par une partition de l'ensemble des $n-k$ entiers restants. On en déduit que

$$\operatorname{card} E_k = \binom{n}{k} B_{n-k}.$$

Ainsi,

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k.$$

Vérifions à présent par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $B_n \leq n!$. Pour $n = 0$, $B_0 = 1 \leq 0!$ (nombre de partitions de l'ensemble vide). Soit alors $n \in \mathbb{N}$, et supposons la propriété vraie pour tout $k \leq n$. On a donc

$$B_{n+1} \leq \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k! = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!} \leq (n+1)!.$$

Il s'ensuit que la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{B_n}{n!} x^n$ est de rayon de convergence supérieur ou égal à 1. Notons f sa somme, qui définit alors une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, 1[$. Pour tout $x \in]-1, 1[$, on a

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_{n+1}}{n!} x^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{B_k}{n!} x^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{B_k}{k!} x^k \frac{1}{(n-k)!} x^{n-k} \\
&= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} x^n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \right) \\
&= f(x) e^x,
\end{aligned}$$

donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \lambda e^{e^x}$. Comme $f(0) = B_0 = 1 = \lambda e$, alors $f(x) = \frac{1}{e} e^{e^x}$.

Finalement, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} e^{e^x} &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{kx}}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{k^l x^l}{k! l!} \\ &= \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{x^l}{l!} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^l}{k!}, \end{aligned}$$

le théorème de Fubini étant licite car $\sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \left| \frac{k^l x^l}{k! l!} \right| = e^{e^{|x|}} < +\infty$. Par conséquent, par unicité du développement en série entière,

$$B_n = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{k!}.$$

Références

[FGN] Serge Francinou, Hervé Gianella, Serge Nicolas, *Oraux X-ENS : Algèbre 1.*