Formes quadratiques réelles. Exemples et applications

Caroline Robet

2 novembre 2014

Introduction

La notion de forme quadratique naît avec l'étude des coniques par Fermat au dix-septième siècle puis celle des quadriques par Euler au dix-huitième. On va montrer dans ce mémoire que l'étude algébrique des formes quadratiques permet de déduire des résultats aussi bien en géométrie qu'en analyse.

1 Forme quadratique et algèbre bilinéaire

1.1 Définitions et premières propriétés

Définition 1. *Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels et une application* $\begin{array}{rccc} \varphi : & E \times F & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & \varphi(x,y) \end{array}$. *On dit que φ est bilinéaire si :*

- $\forall x \in E,\ y \longrightarrow \varphi(x,y)$ *est linéaire.*
- $\forall y \in F,\ x \longrightarrow \varphi(x,y)$ *est linéaire.*

De plus, φ est symétrique si $\forall (x,y) \in E^2,\ \varphi(x,y) = \varphi(y,x)$

Définition 2. *On appelle forme quadratique sur E toute application q de la forme* $\begin{array}{rccc} q : & E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \varphi(x,x) \end{array}$ *où φ est une forme bilinéaire symétrique sur E.*

Exemples

- Dans $\mathbb{R}^3$, $q(x,y,z) = 3x^2 + y^2 + 2xy - 3xz$ est une forme quadratique.
- En dimension infinie, q : $\mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $q(P) = \int_0^1 P(x)P''(x)dx$ est une forme quadratique sur $\mathbb{R}[X]$

Proposition 3. *Soit q une forme quadratique sur E. Il existe une unique forme bilinéaire symétrique φ telle que $\forall x \in E,\ q(x) = \varphi(x,x)$. La forme bilinéaire φ s'appelle la forme polaire de q.*

Proposition 4. ***Identité de polarisation*** *Soit φ la forme polaire associée à la forme quadratique q alors on a :*
- $\varphi(x,y) = \frac{1}{2}\big(q(x+y) - q(x) - q(y)\big)$
- $\varphi(x,y) = \frac{1}{2}\big(q(x+y) - q(x-y)\big)$

Les identités de polarisation permettent de prouver qu'il y a équivalence entre se donner une forme bilinéaire symétrique ou se donner une forme quadratique.

Exemples
- Le produit scalaire dans un espace euclidien a pour forme quadratique associée : $||.||^2$.
- Si $\begin{array}{rccc} q: & M_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & A & \longmapsto & tr(^tAA) \end{array}$ alors la forme polaire associée à cette forme quadratique est $\varphi(A,B) = tr(^tAB)$
- Pour une variable aléatoire X admettant un moment d'ordre 2, var(X) est une forme quadratique de forme polaire cov(X,Y)

Écriture en dimension finie : Soient E de dimension finie et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Alors pour tout $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et pour tout $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$ on peut écrire matriciellement $\varphi(x,y)$ comme :

$$\varphi(x,y) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j \varphi(e_i, e_j) =^t XMY$$

avec M=$\big(\varphi(e_i,e_j)\big)_{i,j\in\{1\dots n\}}$, X=$(x_1, \dots, x_n)^t$ et Y=$(y_1, \dots, y_n)^t$

Changement de base : Soit E de dimension finie n. Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. Si P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ (P= $Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$), $M = Mat_{\mathcal{B}}(\varphi)$ et $M' = Mat_{\mathcal{B}'}(\varphi)$ alors $M' =^t PMP$

Définition 5. *Soit q une forme quadratique sur E de dimension finie et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. On appelle matrice de q dans la base $\mathcal{B}$ la matrice de la forme polaire φ de q dans la base $\mathcal{B}$: M=$\big(\varphi(e_i,e_j)\big)_{i,j\in\{1\dots n\}}$. Le rang de q est le rang de cette matrice.*

Remarques :

- Le rang de q est aussi le rang de sa forme polaire.
- Grâce à la formule de changement de base, on prouve que le rang de la forme quadratique ne dépend pas de la base choisie. En effet, deux matrices congrues ont même rang.

Exemple : Dans $\mathbb{R}^3$, $q(x, y, z) = 3x^2 + y^2 + 2xy - 3xz$ a pour matrice dans la base canonique $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -3/2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ qui est de rang 3 donc q est de rang 3.

Définition 6. *On appelle noyau de q le sous-espace vectoriel de E noté Ker(q) défini par*

$$Ker(q) = \{x \in E | \forall y \in E, \varphi(x, y) = 0\}$$

avec φ la forme polaire de q.
La forme q est dite non-dégénérée si $Ker(q) = \{0\}$, dégénérée sinon.

Remarque : $det(M) \neq 0 \Leftrightarrow$ q est non-dégénérée où M est la matrice associée à la forme quadratique q.

Exemples :

- Dans l'exemple précédent, M=$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -3/2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,
  on a $det(M) = \frac{-9}{4} \neq 0$ donc q est non-dégénérée.
- *Soit f et g deux formes linéaires sur E de dimension n alors pour $n \geqslant 3$, la forme quadratique q(x)=f(x)g(x) est dégénérée.* En effet, son rang est inférieur ou égal à 2 donc son noyau est non réduit à 0.

1.2 Formes quadratiques positives, définies positives

On va désormais s'intéresser tout particulièrement aux formes quadratiques positives et définies positives pour lesquelles on a des inégalités.

Définition 7. *Soit q une forme quadratique. On dit que q est définie si q(x)=0* $\Leftrightarrow x = 0$

Définition 8. *q est dite positive si* $\forall x \in E$, $q(x) \geqslant 0$

Remarque : q est définie positive si $\forall x \neq 0$, $q(x) > 0$
Exemple : $q(A) = \big(tr(A)\big)^2$ est positive mais non définie car $q(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix})$=0

Proposition 9. *Si q est définie alors q est non-dégénérée.*

Démonstration. Par contraposée, supposons q dégénérée alors il existe x non nul tel que pour tout $y \in E$, $\varphi(x, y) = 0$. En particulier pour x=y, $\varphi(x, x) = 0$ donc q est non-définie. □

Remarque : La réciproque est fausse. En effet, $q(x, y) = x^2 - y^2$ est non-dégénérée mais q n'est pas définie car q(x,x)=0, $\forall x \in E$

Théorème 10. ***Inégalité de Schwarz*** *Si q est positive alors* $\forall (x, y) \in E^2$,

$$| \varphi(x, y) |^2 \leqslant q(x)q(y)$$

Si de plus, q est définie il y a égalité si et seulement si x et y sont liés.

Démonstration. On a $\forall t \in \mathbb{R}$, $q(tx + y) = t^2 q(x) + 2t\varphi(x, y) + q(y) \geqslant 0$ car q est positive.
Si q(x)=0, alors on a $\forall t \in \mathbb{R}$, $2t\varphi(x, y) + q(y) \geqslant 0$ ce qui entraîne $\varphi(x, y) = 0$
Si $q(x) \neq 0$, alors on a un polynôme du second degré qui ne change pas de signe. Son discriminant $4\varphi(x, y)^2 - q(x)q(y)$ est donc négatif d'où l'inégalité.
Pour le cas où q est de plus définie, on a égalité lorsque le discriminant est nul.
C'est à dire si il existe t_0 tel que $q(t_0 x + y) = 0$ ce qui équivaut à $t_0 x + y = 0$ car q est définie. Donc x et y sont liés. □

Corollaire 11. ***Inégalité de Minkowsky*** *Si q est positive alors*

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \sqrt{q(x+y)} \leqslant \sqrt{q(x)} + \sqrt{q(y)}$$

Démonstration. Par Schwarz, on a

$$q(x+y) = q(x) + 2\varphi(x,y) + q(y) \leqslant q(x) + 2\sqrt{q(x)q(y)} + q(y)$$

donc $q(x+y) \leqslant (\sqrt{q(x)} + \sqrt{q(y)})^2$ d'où l'inégalité. □

L'inégalité de Minkowsky est donc une conséquence immédiate de l'inégalité de Schwarz. Elle exprime que si q est positive alors $S(x) = \sqrt{q(x)}$ définit une semi-norme. Si de plus, q est définie alors S est une norme.

2 Orthogonalité et isotropie

2.1 Orthogonalité

Définition 12.
- *Deux vecteurs x et y de E sont dit orthogonaux selon q si* $\varphi(x,y) = 0$
- *Soit* $A \subset E$*, on appelle orthogonal de A selon q l'ensemble*

$$A^\perp = \{y \in E | \forall x \in A, \varphi(x,y) = 0\}$$

- *Deux sous-ensembles A et B de E sont orthogonaux selon q si* $\forall x \in A,\ \forall y \in B,\ \varphi(x,y) = 0$*. On note* $A \perp B$

Proposition 13.
1. *Si* $A \subset E$*,* $A^\perp$ *est un sous-espace vectoriel de E.*
2. $Ker(q) = E^\perp$
3. *Si* $F \subset E$*, alors* $F \subset F^{\perp\perp}$
4. *Si* $A \subset B \subset E$*, on a* $B^\perp \subset A^\perp$

Démonstration.
1. Soit x_1,$x_2 \in A^\perp$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors pour $y \in A$
$\varphi(x_1 + \lambda x_2, y) = \varphi(x_1, y) + \lambda\varphi(x_2, y) = 0$

2. Par définition, $Ker(q) = \{x \in E | \forall y \in E, \varphi(x, y) = 0\} = E^\perp$
3. $F^{\perp\perp} = \{y \in E | \forall x \in F^\perp, \varphi(x, y) = 0\}$ En particulier si $y \in F$ alors $\forall x \in F^\perp$ $\varphi(x, y) = 0$ donc $F \subset F^{\perp\perp}$.
4. Soit $y \in B^\perp$, alors $\forall x \in B$ $\varphi(x, y) = 0$ en particulier comme $A \subset B$, $\forall x \in A$ $\varphi(x, y) = 0$ donc $y \in A^\perp$.

□

Proposition 14. *Si E est de dimension finie, tout sous-espace vectoriel F de E vérifie*

$$dim(F) + dim(F^\perp) = dim(E) + dim(F \cap Ker(q))$$

Démonstration. On considère l'application $\begin{array}{rccc} \psi : & F & \longrightarrow & E^* \\ & x & \longmapsto & \varphi(x, .) \end{array}$. Cette application est linéaire donc $dim(Ker(\psi)) + dim(Im(\psi)) = dim(F)$ or $Ker(\psi) = F \cap Ker(q)$ et $(Im(\psi))^\circ = F^\perp$. ($B^\circ = \{x \in E \mid \forall \phi \in B \subset E^*, \phi(x) = 0\}$) Or $dim(Im(\psi))^\circ = dim(E) - dim(Im(\psi)$ On en déduit le théorème. □

Remarque : Si q est non-dégénérée, on a $dim(F) + dim(F^\perp) = dim(E)$. Mais cela ne vaut pas dire que $F \oplus F^\perp = E$ car avec $q(x, y) = x^2 - y^2$ et F=Vect($\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$). On a $F^\perp = F$ alors qu'on a l'égalité des dimensions.

2.2 Groupe orthogonal associé à une forme quadratique

On souhaite étudier les endomorphismes f de E qui conservent une forme quadratique q, c'est à dire tels que q(f(x))=q(x), $\forall x \in E$

Définition 15. *Soit E de dimension finie, q une forme quadratique non-dégénérée sur E, $f \in End(E)$. Il existe alors un et un seul endomorphisme f^* de E tel que $\varphi(f(x), y) = \varphi(x, f^*(y))$, $\forall x, y \in E$ où φ est la forme polaire de q. f^* est dit adjoint de f relativement à φ.*

Démonstration. En effet, soient (e_i) une base de E, $M = \big(\varphi(e_i, e_j)\big)_{i,j\in\{1\dots n\}}$, $A = Mat_{(e_i)}(f)$, $X = Mat_{(e_i)}(x)$ et $Y = Mat_{(e_i)}(y)$. Supposons que f^* existe et posons $A^* = Mat_{(e_i)}(f^*)$. L'identité de l'énoncé s'écrit

$$^t(AX)MY =^t XMA^*Y \quad \forall X,\ Y \in M_{n,1}(\mathbb{R})$$

d'où

$$^tX(^tAM)Y =^t X(MA^*)Y \quad \forall X,\ Y \in M_{n,1}(\mathbb{R})$$

ce qui est équivalent à $^tAM = MA^*$
Comme q est non-dégénérée, M est inversible. On a donc

$$A^* = M^{-1}\ {}^tA\ M$$

Ceci montre que A^* et donc f^* est unique.
Réciproquement, si on définit $f^* : E \longrightarrow E$ par $Mat_{(e_i)}(f^*) = M^{-1}\ {}^tA\ M$ alors en remontant les calculs, on voit que f^* vérifie l'identité de l'énoncé. □

Écriture matricielle : Par la démonstration précédente, on a si $M = \big(\varphi(e_i, e_j)\big)_{i,j\in\{1\dots n\}}$ et $A = Mat_{(e_i)}(f)$ alors $A^* = M^{-1}\ {}^tA\ M$

Exemple : Si $E = \mathbb{R}^2$ muni de $q(x) = x_1^2 - x_2^2$ et A=Mat(f)=$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ alors $A^* = M^{-1}\ {}^tA\ M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix}$

Proposition 16. *E espace vectoriel de dimension finie et q non-dégénérée. On a équivalence entre :*

1. *q(f(x))=q(x)* $\forall x \in E$
2. $\varphi(f(x), f(y)) = \varphi(x, y)\ \forall x, y \in E$
3. $f^* \circ f = id$

Un tel endomorphisme est dit orthogonal relativement à q.

Démonstration. 1) $\Leftrightarrow$ 2) : par les identités de polarisation.
2) $\Leftrightarrow$ 3) : On a $\varphi(f(x), f(y)) = \varphi(x, y)\ \forall x, y \in E \Leftrightarrow \varphi(f^* \circ f(x), y) = \varphi(x, y)$ $\forall x, y \in E \Leftrightarrow f^* \circ f(x) = x$ car q est non-dégénérée $\Leftrightarrow f^* \circ f = id$ □

Proposition 17. *Soit O(q)=*$\{f \in End(E) | f^* \circ f = id\}$*. On a :*

- $id \in O(q)$
- *si* $f,g \in O(q)$ *alors* $f \circ g \in O(q)$
- *si* $f \in O(q)$ *alors* $f^{-1} \in O(q)$

En particulier, $O(q)$ *est un groupe pour* $\circ$ *dit groupe orthogonal de* q.

Démonstration. On a clairement $id^* = id$ car $\varphi(id(x), y) = \varphi(x, id(y))$ donc $id \in O(q)$
On a $\forall f, g \in End(E)$, $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$ car $\forall x, y \in E$ $\varphi(f \circ g(x), y) = \varphi(g(x), f^*(y)) = \varphi(x, g^* \circ f^*(y))$. Si f,g$\in O(q)$ alors

$$(f \circ g)^* \circ (f \circ g) = g^* \circ f^* \circ f \circ g = g^* \circ id \circ g = g^* \circ g = id$$

donc $f \circ g \in O(q)$.
Si $f \in O(q)$ alors $f \circ f^{-1} = id \in O(q)$ d'où $(f \circ f^{-1})^* \circ (f \circ f^{-1}) = id$ donc

$$(f^{-1})^* \circ f^* \circ f \circ f^{-1} = id$$

d'où $(f^{-1})^* \circ f^{-1} = id$. □

Proposition 18. *Soit* $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ *une base de E.* M=$Mat_{(e_i)}(f)$ *alors* $f \in O(q) \Leftrightarrow {}^tAMA = M$

Démonstration. Ceci découle directement de l'écriture matricielle de f^*. □

Exemple : Soit $q(x) = 2x_1x_2$ dans $\mathbb{R}^2$ alors

$$O(q) = \{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1/a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & b \\ 1/b & 0 \end{pmatrix} |a, b \in \mathbb{R}^*\}$$

2.3 Isotropie

Définition 19. *Soit q une forme quadratique sur E. On appelle cône isotrope l'ensemble*

$$I(q) = \{x \in E | q(x) = 0\}$$

Exemples

- Si E=$\mathbb{R}^2$ et $q_1(x) = x_1^2 - x_2^2$. On a $I(q_1) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_1 = \pm x_2\}$
- Si E=$\mathbb{R}^3$ et $q_2(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$ d'où $I(q_2) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_3 = \pm\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\}$

Proposition 20. *On a* $Ker(q) \subset I(q)$

Définition 21. *Un sous-espace vectoriel F de E est dit isotrope si*

$$F \cap F^{\perp} \neq \{0\}$$

Remarque : Il existe des sous-espaces isotropes si et seulement si $I(q) \neq \{0\}$

Définition 22. *Un sous-espace F de E est dit totalement isotrope si* $\varphi_{|F} = 0$ *avec* φ *la forme polaire de q.*

Remarques :
- F est totalement isotrope $\Leftrightarrow F \subset I(q) \Leftrightarrow F \subset F^{\perp}$
- Si F=$\{0\}$ alors F est totalement isotrope donc de tels espaces existent toujours.

Exemple : $q(x) = x_1^2 - x_2^2$ et F=$\{(x_1, x_2) | x_1 = x_2\}$ est totalement isotrope et non inclus dans le noyau.

3 Réduction des formes quadratiques

Dans toute cette section, nous réaliserons une pseudo-réduction dans le sens où c'est ${}^tPMP$ qui sera diagonale.

3.1 Réduction simultanée et Applications

Théorème 23. *Si q est une forme quadratique définie positive et q' est une forme quadratique quelconque alors il existe une base orthonormée pour q qui est orthogonale pour q'.*

Démonstration. La forme q est définie positive. Elle définit donc un produit scalaire. On peut donc noter $q = \|.\|^2$ et $\varphi(x,y) = x.y$. On fait une démonstration par récurrence sur la dimension n de l'espace vectoriel E. Le résultat est vrai en dimension 1. Par récurrence, on le suppose vrai pour la dimension n-1. On se place alors en dimension n.

Pour cela, on définit une fonction $f : E \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que f(x)=$\frac{q'(x)}{\|x\|^2}$. Comme la sphère unité de E est compacte car E est de dimension finie et que l'application $f_{|S}$ est continue, elle atteint son maximum en un point e_1 de S.(e_1 de norme 1 dans E) De plus, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ et $\forall x \in E$, $f(\lambda x) = f(x)$. Donc e_1 réalise le maximum de f sur $E \setminus \{0\}$.

Maintenant f est une application différentiable définie sur l'ouvert $E \setminus \{0\}$. Comme elle atteint un extremum en e_1, sa différentielle doit s'annuler en ce point. On a donc

$$df_{e_1}(x) = \frac{2\varphi'(e_1,x)\|e_1\|^2 - 2q'(e_1)(e_1.x)}{\|e_1\|^4} = 0$$

d'où $2\varphi'(e_1,x) - 2q'(e_1)(e_1.x) = 0$. On a donc si x est orthogonal à e_1 pour q (i.e $e_1.x = 0$) alors il est orthogonal pour q' ($\varphi'(e_1,x) = 0$).

Enfin, on décompose E en somme directe orthogonale pour q : $E = Vect(e_1) \oplus Vect(e_1)^{\perp}$. On peut appliquer l'hypothèse de récurrence au sous-espace $Vect(e_1)^{\perp}$ de dimension n-1 car q est non-dégénérée. Il existe une base $(u_1, \ldots, u_{n-1})$ orthonormale pour q et orthogonale pour q'. Comme $(u_1, \ldots, u_{n-1})$ sont orthogonaux à e_1 pour q, par la propriété précédente vérifiée par e_1 ils le sont pour q'. Donc $(u_1, \ldots, u_{n-1}, e_1)$ est une base orthogonale pour q' et orthonormale pour q car on a pris e_1 de norme 1 pour q.

□

Application 24. *Soit A une matrice symétrique réelle. Alors A est diagonalisable.*

Démonstration. En effet, la forme bilinéaire définie sur $\mathbb{R}^n$ par $\varphi(x,y) = {}^t x A y$ est symétrique. On peut donc trouver une base orthonormée pour la norme euclidienne qui soit orthogonale pour φ. En appelant P, la matrice de passage, on a ${}^t P A P$ est diagonale. Mais comme P est orthonormée, on a ${}^t P = P^{-1}$. On a donc trouvé un changement de base tel que $P^{-1}AP$ soit diagonale. □

Application 25. *Soient A et B deux matrices symétriques réelles définies positives, α et β deux réels positifs tels que $\alpha + \beta = 1$.*
Alors
$$\det(\alpha A + \beta B) \geqslant (\det A)^\alpha (\det B)^\beta$$
De plus, l'inégalité est stricte si $\alpha \in]0,1[$ et si $A \neq B$.

Démonstration. Soient q_A et q_B les formes quadratiques définies positives associées à A et B.
D'après le théorème de réduction simultanée, il existe une base qui est q_A-orthonormale et q_B-orthogonale.
Ainsi, il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et $D = diag(\lambda_1, .., \lambda_n)$ telles que :
$$A = {}^tPP \text{ et } B = {}^tPDP$$
On a donc $(\det A)^\alpha (\det B)^\beta = (\det P)^{2\alpha}((\det P)^2 \det D)^\beta = (\det P)^2 (\det D)^\beta$ car $\alpha + \beta = 1$.
D'autre part, $\det(\alpha A+\beta B) = \det({}^tP(\alpha I_n+\beta D)P) = (\det P)^2 \det(\alpha I_n+\beta D)$.
Le problème revient donc à démontrer que
$$(\det(\alpha I_n + \beta D) \geqslant (\det D)^\beta$$
$$\Leftrightarrow \prod_{i=1}^{n}(\alpha + \beta\lambda_i) \geqslant \left(\prod_{i=1}^{n}\lambda_i\right)^\beta$$
$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n}\ln(\alpha + \beta\lambda_i) \geqslant \beta\sum_{i=1}^{n}\ln(\lambda_i)$$
Or, par concavité du logarithme, on a
$$\forall i \in \{1, .., n\},\ \ln(\alpha + \beta\lambda_i) \geqslant \alpha\ln(1) + \beta\ln\lambda_i = \beta\ln\lambda_i$$
D'où le résultat en sommant sur i.
Dans le cas où $\alpha \in]0,1[$ et $A \neq B$, comme au moins un des $\lambda_i \neq 1$, par concavité stricte du logarithme, on obtient bien l'inégalité stricte voulue. □

Application 26. *Soit K un compact d'intérieur non vide de $\mathbb{R}^n$.*
Alors il existe un unique ellipsoïde centré en 0 de volume minimal contenant K.
Autrement dit, il existe une unique forme quadratique q définie positive telle que $\mathcal{E}_q = \{x \in \mathbb{R}^n, q(x) \leqslant 1\}$ soit de volume minimal et contienne K.

Démonstration. Notations :

- $Q = \{$formes quadratiques de $\mathbb{R}^n\}$
- $Q^+ = \{$formes quadratiques positives de $\mathbb{R}^n\}$
- $Q^{++} = \{$formes quadratiques définies positives de $\mathbb{R}^n\}$

Soit $q \in Q^{++}$.
On sait qu'il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, .., e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle q est de la forme :

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2 \text{ avec } a_i > 0 \ \forall i$$

Soit alors, V_q le volume de $\mathcal{E}_q$, on a donc

$$V_q = \int \cdots \int_{\sum_{i=1}^n a_i x_i^2 \leqslant 1} dx_1..dx_n$$

En posant $t_i = \sqrt{a_i} x_i$, on obtient :

$$V_q = \int \cdots \int_{\sum_{i=1}^n t_i^2 \leqslant 1} \frac{dt_1..dt_n}{\sqrt{a_1..a_n}}$$

Soit S la matrice de q dans une base orthonormale, comme S est symétrique réelle définie positive (ie dans $\mathcal{S}_n^{++}$), il existe P dans $GL_n(\mathbb{R})$ telle que $S = P diag(a_1, .., a_n) P^{-1}$.
D'où, $\det S = a_1...a_n$ ne dépend pas de la base choisie, on pose donc

$$D(q) = \prod_{i=1}^{n} a_i$$

D'où

$$V_q = \frac{V_0}{\sqrt{D(q)}}$$

où V_0 représente le volume de la boule unité de $\mathbb{R}^n$.
Le problème admet une nouvelle formulation : Montrons qu'il existe une unique $q \in Q^{++}$ telle que $D(q)$ soit maximal et que $q(x) \leqslant 1$ pour tout x dans K.

Soit $\mathcal{A} = \{q \in Q^+ | q(x) \leqslant 1, \forall x \in K\}$ et $N(q) = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |q(x)|$ une norme sur Q.
Montrons que $\mathcal{A}$ est un compact convexe non vide de Q.

- $\underline{\mathcal{A}\text{ convexe}}$:
  Soient $q, q' \in \mathcal{A}$ et $\lambda \in [0,1]$. Alors,
  $$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \lambda q(x) + (1-\lambda)q'(x) \geqslant 0$$
  $$\forall x \in K,\ \lambda q(x) + (1-\lambda)q'(x) \leqslant \lambda + 1 - \lambda = 1$$
  D'où $\lambda q + (1-\lambda)q'$ appartient à $\mathcal{A}$ et donc $\mathcal{A}$ est convexe.
- $\underline{\mathcal{A}\text{ fermé}}$:
  Soit $(q_k)_{k\geqslant 0} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ qui converge vers $q \in Q$.
  On a :
  $$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ |q(x) - q_k(x)| \leqslant \|x\|^2 N(q - q_k)$$
  On en déduit donc que $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \lim\limits_{k\to\infty} q_k(x) = q(x)$.
  Donc $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $q(x) \geqslant 0$ et $\forall x \in K$, $q(x) \leqslant 1$ et donc q appartient à $\mathcal{A}$.
  D'où $\mathcal{A}$ est fermé.
- $\underline{\mathcal{A}\text{ borné}}$:
  Le compact K est d'intérieur non vide, donc il existe a dans K et $r > 0$ tel que $B(a,r) \subset K$. Soit $q \in \mathcal{A}$.
  Si $\|x\| \leqslant r$, alors $a + x \in K$ donc $q(a+x) \leqslant 1$.
  De plus, $q(-a) = q(a) \leqslant 1$, donc d'après l'inégalité de Minkowski, on a :
  $$\begin{aligned} \sqrt{q(x)} = \sqrt{q(a+x-a)} &\leqslant \sqrt{q(x+a)} + \sqrt{q(-a)} \\ &\leqslant 2 \end{aligned}$$
  Donc $q(x) \leqslant 4$.
  Si $\|x\| \leqslant 1$,
  $$|q(x)| = q(x) = \frac{1}{r^2} q(\underbrace{rx}_{\|.\|\leqslant r}) \leqslant \frac{4}{r^2}$$
  En prenant le *sup* à gauche, on obtient
  $$N(q) \leqslant \frac{4}{r^2}$$
  D'où $\mathcal{A}$ est borné.
- $\underline{\mathcal{A}\text{ non vide}}$:
  Comme K est compact, il est borné donc il existe $M > 0$ tel que pour tout x dans K, $\|x\| \leqslant M$.
  Soit $\widetilde{q} \in Q^+$ définie par $\widetilde{q}(x) = \frac{\|x\|^2}{M^2}$. Alors, $\forall x \in K$, on a bien $\widetilde{q}(x) \leqslant 1$.
  Donc, $\widetilde{q}$ appartient à $\mathcal{A}$.
  D'où $\mathcal{A}$ est non vide.

Comme $\mathcal{A}$ est compact, l'application continue $q \mapsto D(q)$ atteint son maximum en $q_0 \in \mathcal{A}$.
De plus, $D(\widetilde{q}) = \frac{1}{M^{2n}} > 0$, donc par maximalité de $D(q_0)$, on a $D(q_0) > 0$ et donc $q_0 \in Q^{++}$.

Montrons maintenant l'unicité de q_0. Supposons qu'il existe $q \neq q_0$ telle que $D(q) = D(q_0)$.
Par convexité de $\mathcal{A}$, $\frac{1}{2}(q + q_0) \in \mathcal{A}$.
Ainsi, par convexité logarithmique du déterminant sur $\mathcal{S}_n^{++}$, on a :

$$D\left(\frac{1}{2}(q + q_0)\right) = \det\left(\frac{1}{2}(S + S_0)\right) > (\det S)^{\frac{1}{2}}(\det S_0)^{\frac{1}{2}} = D(q_0)$$

Ce qui est absurde par maximalité de $D(q_0)$.
D'où l'unicité et le théorème est finalement démontré.

□

3.2 Théorème de Sylvester

Définition 27. *Une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E est dite q-orthogonale si $\forall e_i \neq e_j$, $\varphi(e_i, e_j) = 0$. Elle est dite orthonormée si $\varphi(e_i, e_j) = \delta_{i,j}$*

Théorème 28. *Si E est de dimension finie alors il existe une base q-orthogonale de E. On a alors si $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est q-orthogonale,*

$$q(x) = q(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 q(e_i).$$

La matrice de q dans la base $\mathcal{B}$ est diagonale.

Démonstration. On procède par récurrence sur la dimension n de E. Pour n=1, il n'y a rien à montrer. Supposons le résultat vrai au rang n-1. Si q est nulle, toute base de E est q-orthogonale. Sinon, il existe $v \in E$ tel que $q(v) \neq 0$. Dans ce cas, l'application $f = \varphi(v, .)$ est une forme linéaire non nulle sur E. Son noyau H est un hyperplan de E et comme $v \notin H$, on a $E = H \oplus Vect(v)$. Comme dim(H)=n-1, d'après l'hypothèse de récurrence, il existe une base $(e_1, \dots, e_{n-1})$ de H qui est q-orthogonale pour $q_{|H}$. On obtient ainsi $(e_1, \dots, e_{n-1}, v)$ est une base q-orthogonale de q.

□

Remarque : Il ne faut pas confondre la recherche d'une base orthogonale où on veut trouver P tel que ${}^tPAP$ soit diagonale avec la diagonalisation des endomorphismes où $P^{-1}AP$ est diagonale.

On va tout d'abord exposer un algorithme qui permet de réduire les formes quadratiques et qui permet de trouver une base q-orthogonale pour un endomorphisme.

Méthode de Gauss : Pour toute forme quadratique q, il existe r=rg(q) formes linéaires indépendantes $l_1, \dots l_r$ telles que $q = \sum_{i=1}^{r} a_i l_i^2$ avec $a_i \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Pour cela, si des termes carrés apparaissent, on utilise $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de carrés. Enfin, pour les termes croisés, on utilise $xy = \frac{1}{4}\big((x+y)^2 - (x-y)^2\big)$ □

Exemple. Dans $\mathbb{R}^3$, $q(x, y, z) = x^2 - 2y^2 + xz + yz$ On commence avec x^2, $q(x, y, z) = (x + z/2)^2 - z^2/4 - 2y^2 + yz$ puis on continue avec les y^2, $q(x, y, z) = (x + z/2)^2 - 2(y - z/4)^2 - z^2/8$

La méthode de Gauss permet également de trouver une base q-orthogonale :
Exemple : Soit $q(x) = x_1^2 + 4x_2^2 + 9x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_2x_3$, on peut réécrire q comme

$$q(x) = (x_1 + x_2)^2 + 3(x_2 + x_3)^2 + 6x_3^2.$$

On pose $x_1' = x_1 + x_2$, $x_2' = x_2 + x_3$ et $x_3' = x_3$ qui sont les coordonnées de x dans la base orthogonale que l'on cherche. On obtient

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1' & - x_2' & & +x_3' \\ x_2 &= & x_2' & & -x_3' \\ x_3 &= & & & x_3' \end{aligned}$$

D'où $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ forment une base q-orthogonale.

Théorème 29. ***Théorème de Sylvester*** *Soit E un espace vectoriel de dimension finie n sur $\mathbb{R}$ et q une forme quadratique sur E. Il existe alors une base $\{e_i\}$ de E telle que si $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ alors*

$$q(x) = x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_r^2$$

où r=rg(q). C'est à dire dans cette base q s'écrit $\begin{pmatrix} I_p & (0) & (0) \\ (0) & -I_{r-p} & (0) \\ (0) & (0) & (0) \end{pmatrix}$ *Le couple (p,r-p) est appelé signature de q noté sign(q)*

Démonstration. Soit $\{e_i\}$ une base orthogonale alors si $x = \sum_{i=1}^n y_i e_i$, on a $q(x) = \sum_{i=1}^n y_i^2 q(e_i)$. On note $a_i = q(e_i) \in \mathbb{R}$. Si r=rang(q) alors on a par exemple (quitte à changer l'ordre) $a_i \neq 0$ pour $i \in \{1, \ldots, r\}$, 0 sinon. Supposons que $a_1, \ldots, a_p > 0$ et $a_{p+1}, \ldots, a_r < 0$. On a ainsi

$$q(x) = (\sqrt{a_1} y_1)^2 + \cdots + (\sqrt{a_p} y_p)^2 - (\sqrt{-a_{p+1}} y_{p+1})^2 - \cdots - (\sqrt{-a_r} y_r)^2$$

d'où

$$q(x) = x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_r^2$$

avec $x_i = \sqrt{a_i} y_i$ (i$= 1, \ldots, p$) et $x_j = \sqrt{-a_j} y_j$ (j$= p+1, \ldots, r$)

Il reste à montrer que p ne dépend pas du choix de la base. Considérons deux bases $\{e_i\}$ et $\{e'_i\}$ telles que

$$q(x) = x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_r^2 \quad (x = \sum_{i=1}^n x_i e_i)$$

$$q(x) = y_1^2 + \cdots + y_{p'}^2 - y_{p'+1}^2 - \cdots - y_r^2 \quad (x = \sum_{i=1}^n y_i e'_i)$$

Soient $F = Vect(e_1, \ldots, e_p)$, $G = Vect(e_{p+1}, \ldots, e_n)$, $F' = Vect(e'_1, \ldots, e'_{p'})$, $G' = Vect(e'_{p'+1}, \ldots, e'_n)$
on a si $x \in F \setminus \{0\}$, alors $q(x) > 0$ et si $x \in G'$ alors $q(x) \leqslant 0$. On en déduit que si $x \in F \cap G'$, on a $x = 0$ donc $F \cap G' = \{0\}$. Ainsi F et G' sont en somme

directe. Puisque $F \oplus G' \subset E$ on a $dim(F)+dim(G') \leqslant n$ d'où $p+(n-p') \leqslant n$ donc $p \leqslant p'$. On fait de même avec F' et G pour obtenir $'p \leqslant p$ d'où p=p'.

□

Exemples :

- $q(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 15x_3^2 - 4x_1x_2 + 6x_1x_3 - 8x_2x_3$. On applique tout d'abord la méthode de Gauss qui nous donne $q(x) = (x_1 - 2x_2 + 3x_3)^2 + (\sqrt{8}x_3)^2 - (\sqrt{2}(x_2 - x_3))^2$ donc sign(q)=(2,1).
- Soit q une forme quadratique sur un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{R}$. Alors q est définie positive $\Leftrightarrow sign(q) = (n, 0)$, q est définie négative $\Leftrightarrow sign(q) = (0, n)$, q est non-dégénérée $\Leftrightarrow sign(q) = (p, n-p)$.
- Soit $q_1 : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}\ A \longrightarrow (tr(A))^2$. q_1 est une forme quadratique de forme polaire $\varphi(A, B) = tr(A)tr(B)$. L'application trace est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Son noyau est donc un hyperplan de dimension $n^2 - 1$. Donc la signature de q_1 est donc (1,0).
- Soit $q_2 : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}\ A \longrightarrow tr({}^tAA)$. On obtient $q_2(A) = \sum_{i,j} a_{i,j}^2$ ce qui prouve que q_2 est définie positive donc de signature (n^2,0).
- Soit $q_3 : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}\ A \longrightarrow tr(A^2)$. Si $A \in S_n(\mathbb{R})$ alors $q_3(A) = tr({}^tAA)$ donc $q_{3|S_n(\mathbb{R})}$ est définie positive. De même, si $A \in A_n(\mathbb{R})$ alors $q_3(A) = -tr({}^tAA)$ donc $q_{3|A_n(\mathbb{R})}$ est définie négative. Or $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$ donc

$$sign(q_3) = (dimS_n(\mathbb{R}), dimA_n(\mathbb{R})) = \left(\frac{n(n+1)}{2}, \frac{n(n-1)}{2}\right)$$

4 Applications à la géométrie

4.1 Classification euclidienne des coniques et des quadriques

On se place dans le plan affine euclidien.

Définition 30. *Soient q une forme quadratique non nulle et l une forme linéaire sur $\mathbb{R}^2$. On appelle conique l'ensemble $\mathcal{C}$ des $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant l'équation*

$$q(x, y) + l(x, y) = k \text{ où } k \in \mathbb{R}$$

On peut classer les coniques selon la signature de q. En changeant éventuellement le signe des deux membres, on peut supposer sign(q) est (2,0),(1,1) ou (1,0).

On peut trouver une base orthogonale pour q. On écrit l'équation dans une telle base on obtient $aX^2 + bY^2 + rX + sY = k$.

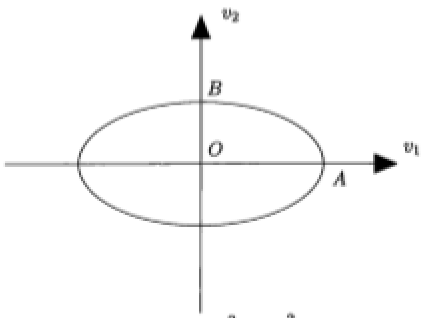
Théorème 31. *Soit $\mathcal{C}$ une conique non vide et qui ne se réduit pas à un point, alors :*

1. *Si sign(q)=(2,0) alors $\mathcal{C}$ est une ellipse*
2. *Si sign(q)=(1,1) alors $\mathcal{C}$ est une hyperbole ou deux droites sécantes*
3. *Si sign(q)=(1,0) alors $\mathcal{C}$ est une parabole qui peut dégénérer en une droite ou en 2 droites parallèles*

Démonstration.

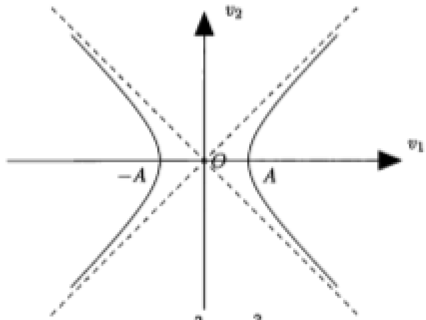
1. On a sign(q)=(2,0) donc $a > 0$ et $b > 0$. En posant $x = X + \frac{r}{2a}$ et $y = Y + \frac{s}{2b}$, on obtient $ax^2 + by^2 = h$ avec $a > 0$ et $b > 0$. On a donc l'équation d'une ellipse
2. On a sign(q)=(1,1) par exemple $a > 0$ et $b < 0$. En posant $x = X + \frac{r}{2a}$ et $y = Y + \frac{s}{2b}$, on obtient $ax^2 + by^2 = h$. Donc si $h \neq 0$, on pose A=$\sqrt{h/a}$ et B=$\sqrt{-h/b}$ pour avoir $\frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2} = 1$. Sinon on a $ax^2 + by^2 = 0$ d'où $(\sqrt{a}x - \sqrt{-b}y)(\sqrt{a}x + \sqrt{-b}y) = 0$ qui sont deux droites sécantes.
3. On a sign(q)=(1,0), dans ce cas ab=0 par exemple $a \neq 0$ et $b = 0$ en posant $x = X + \frac{r}{2a}$ et $y = -sY + k + \frac{r^2}{4a}$ on obtient $ax^2 = y$ si $s \neq 0$ d'où une parabole et $aX^2 + rX - k = 0$ sinon donc une ou 2 droites parallèles dans le cas dégénéré.

$\square$



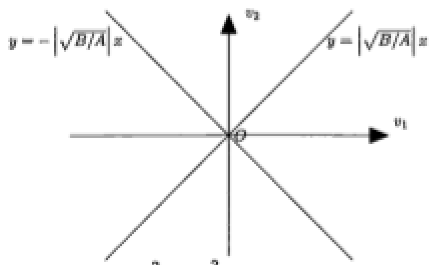
Ellipse : $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$

Figure 1



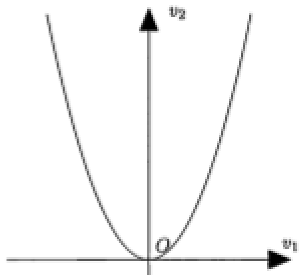
Hyperbole : $\frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2} = 1$

Figure 2



$\frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2} = 0$

Figure 3



Parabole : $y = ax^2$

Figure 4

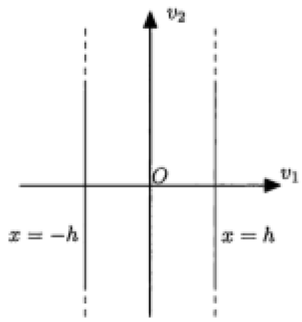


Figure 5

Définition 32. *Soient q une forme quadratique non nulle et l une forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$. On appelle quadrique l'ensemble $\mathcal{Q}$ des $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ vérifiant l'équation*

$$q(x, y, z) + l(x, y, z) = k \text{ où } k \in \mathbb{R}$$

On peut classer les quadriques selon la signature de q. En changeant éventuellement le signe des deux membres, on peut supposer sign(q) est (3,0) ou (2,1) ou (2,0) ou (1,1) ou (1,0). On peut trouver une base orthogonale pour q. On écrit l'équation dans une telle base on obtient $aX^2+bY^2+cZ^2+rX+sY+tZ=k$.

Théorème 33. *Soit $\mathcal{Q}$ une quadrique non vide et qui ne se réduit pas à un point, alors :*

1. *Si sign(q)=(3,0) alors $\mathcal{Q}$ est une ellipsoïde.*
2. *Si sign(q)=(2,1) alors $\mathcal{Q}$ est un hyperboloïde à deux nappes, à une nappe ou un cône.*
3. *Si sign(q)=(2,0) alors $\mathcal{Q}$ est une paraboloïde elliptique ou un cylindre elliptique.*
4. *Si sign(q)=(1,1) alors $\mathcal{Q}$ est une paraboloïde hyperbolique ou un cylindre hyperbolique.*
5. *Si sign(q)=(1,0) alors $\mathcal{Q}$ est une cylindre parabolique ou deux plans parallèles.*

Démonstration. 1. Si sign(q)=(3,0) alors $a>0, b>0$ *et* $c>0$ on pose $x=X+\frac{r}{2a}$, $y=Y+\frac{s}{2b}$, $z=Z+\frac{t}{2c}$ et $h=k-\frac{r^2}{4a}-\frac{s^2}{4b}-\frac{t^2}{4c}$ donne

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}+\frac{z^2}{C^2}=h$$

où $a=\frac{1}{A^2}$, $b=\frac{1}{B^2}$ et $c\frac{1}{C^2}$. On trouve l'équation d'un ellipsoïde.

2. Si sign(q)=(2,1) alors par exemple $a>0, b>0$ *et* $c<0$, on pose $x=X+\frac{r}{2a}$, $y=Y+\frac{s}{2b}$, $z=Z+\frac{t}{2c}$ et $h=k-\frac{r^2}{4a}-\frac{s^2}{4b}-\frac{t^2}{4c}$ donne

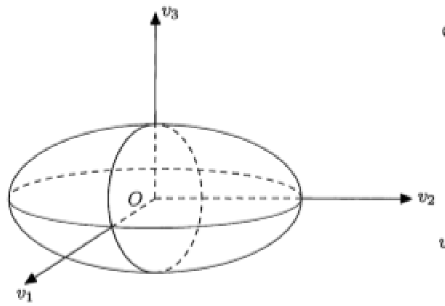
$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}-\frac{z^2}{C^2}=h$$

où $a=\frac{1}{A^2}$, $b=\frac{1}{B^2}$ et $c\frac{-1}{C^2}$. Soit $h>0$, alors on a l'équation d'un hyperboloïde à une nappe, si $h=0$ on a un cône et si $h<0$ on a un hyperboloïde à deux nappes.

3. Si sign(q)=(2,0) alors par exemple $a>0, b>0$ *et* $c=0$, on pose $x=X+\frac{r}{2a}$, $y=Y+\frac{s}{2b}$. Si $t=0$ alors l'équation devient $ax^2+by^2=h$ avec $h=k+\frac{r^2}{4a}+\frac{s^2}{4b}$. C'est donc un cylindre elliptique. Sinon, l'équation devient $ax^2+by^2=z$ avec $z=k-tZ+\frac{r^2}{4a}+\frac{s^2}{4b}$, c'est donc une paraboloïde elliptique.

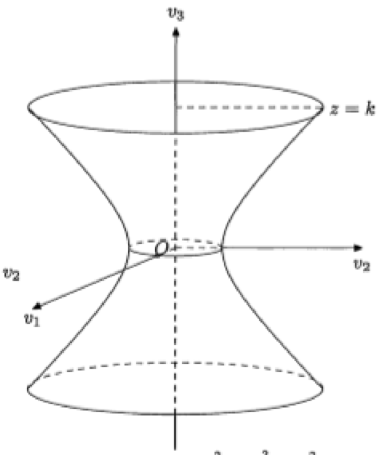
4. Si sign(q)=(1,1) alors par exemple $a > 0, b < 0$ et $c = 0$. Par les mêmes changements de variable que le cas précédent on obtient $ax^2 + by^2 = h$ d'où $\frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2} = h$ qui est un cylindre hyperbolique ou alors $ax^2 + by^2 = z$ d'où $\frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2} = z$ qui est une paraboloïde hyperbolique.
5. Si sign(q)=(1,0) alors par exemple $a > 0, b = 0$ et $c = 0$. On pose $x = X + \frac{r}{2a}$ et $y = h - sY - tZ + \frac{r^2}{4a}$ pour obtenir $ax^2 = y$ qui est une cylindre parabolique si s ou t non nul ou sinon deux plans parallèles avec $ax^2 = h$.

□



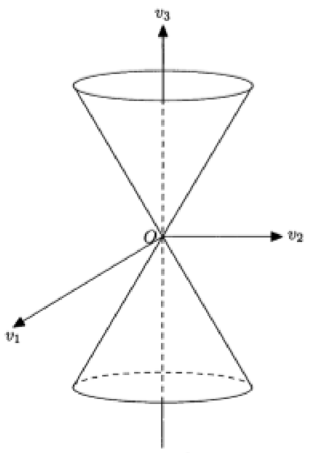
Elllipsoïde : $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{z^2}{C^2} = 1$

Figure 6



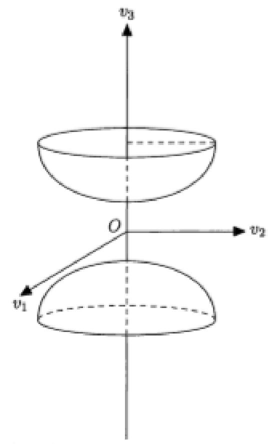
Hyperboloïde à une nappe : $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{z^2}{C^2} = 1$

Figure 7



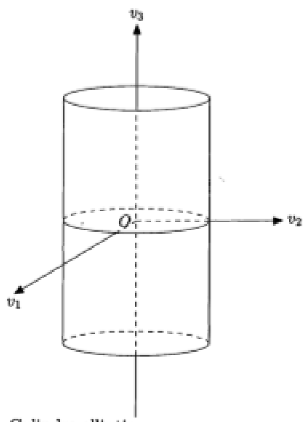
Cône : $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{z^2}{C^2} = 0$

Figure 8



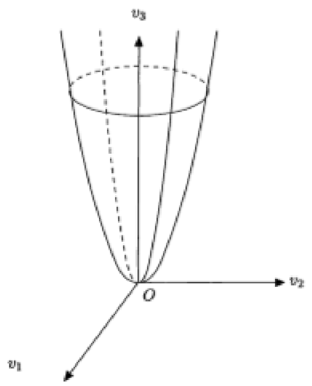
Hyperboloïde à deux nappes : $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{z^2}{C^2} = -1$

Figure 9



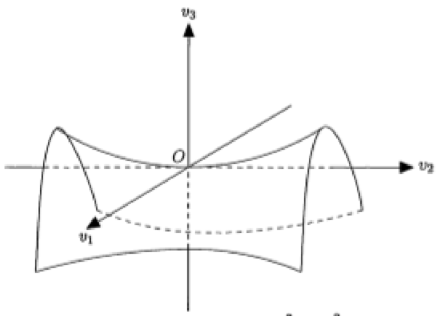
Cylindre elliptique :
$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$

Figure 10



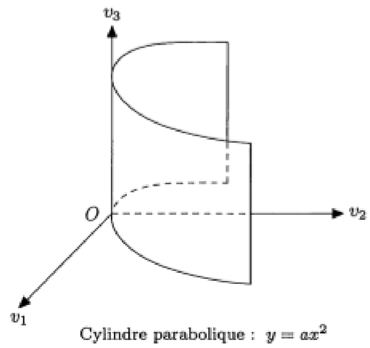
Paraboloïde elliptique :
$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = z$

Figure 11



Paraboloïde hyperbolique : $\frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2} = z$

Figure 12



Cylindre parabolique : $y = ax^2$

Figure 13

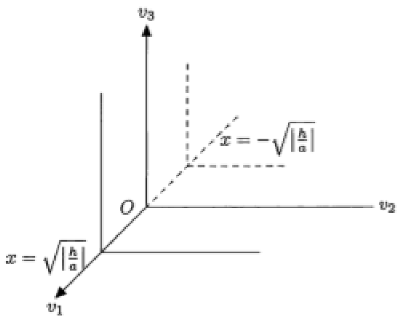


Figure 14

4.2 Géométrie différentielle

Définition 34. *Soit f une fonction de U dans R où U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ qui est différentiable. Un point a pour lequel $Df(a) = 0$ est appelé un point critique de f.*

Définition 35. *La hessienne de f :$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ en un point a est la matrice symétrique $\left(\frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{i,j}$. C'est la matrice d'une forme quadratique* $Q(h) = \sum_i h_i^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a) + 2\sum_{i<j} h_i h_j \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j}(a)$

Proposition 36. *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ qui est $\mathcal{C}^2$ et $a \in U$ un point critique de f. On note q la forme quadratique associée à la hessienne de f en a :*

1. *Si q est définie positive/négative alors f admet un minimum/maximum relatif en a.*
2. *Si q n'est ni positive, ni négative alors f n'admet pas d'extremum relatif en a.*

Démonstration. 1. Si q est une forme quadratique définie positive alors $\forall h \in \mathbb{R}^n$, $h \neq 0$, $q(h) > 0$. Comme la sphère unité de $\mathbb{R}^n$ est compacte, on en déduit que $\alpha = \inf_{\|h\|=1} q(h) > 0$. Ainsi lorsque h tend vers 0,

$$f(a+h) - f(a) = \frac{1}{2}\big(q(h) + o(\|h\|^2)\big) = \frac{\|h\|^2}{2}\left(q\left(\frac{h}{\|h\|}\right) + \circ(1)\right).$$

Ainsi, $f(a+h) - f(a) \geqslant \frac{\|h\|^2}{2}(\alpha + \circ(1))$. Comme $\alpha + \circ(1) \geqslant 0$ sur un voisinage de $h = 0$, on en déduit $f(a+h) \geqslant f(a)$ sur ce voisinage.

2. Si q n'est ni positive ni négative alors dans une certaine base q(h)=$x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_r^2$ avec $p \geqslant 1$ et $r - p \geqslant 1$

$$f(a+h) - f(a) = \frac{1}{2}\big(q(h) + o(\|h\|^2)\big)$$

Dans la direction $Vect(0, \ldots, 0, 1, \ldots 1)$ on a $q(h) \leqslant 0$ donc $f(a+h) \leqslant f(a)$ alors que dans la direction $Vect(1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$, on a $q(h) \geqslant 0$ donc $f(a+h) \geqslant f(a)$. Donc a n'est pas un extremum relatif.

$\square$

FIGURE 1 – Minimum relatif en 0

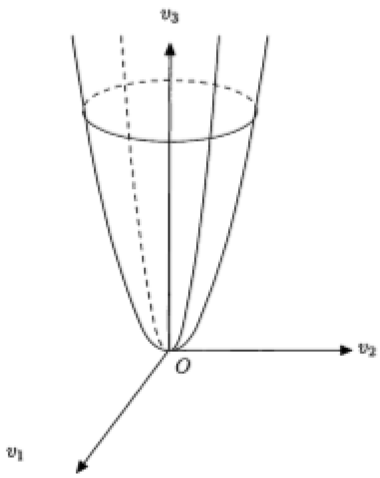
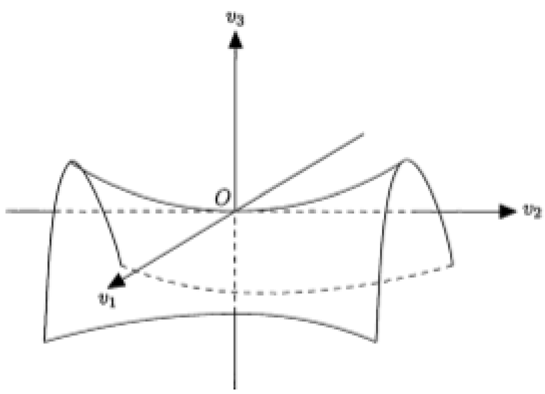


FIGURE 2 – Pas d'extremum relatif en 0



Théorème 37. *Lemme de Morse* *Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ qui est $\mathcal{C}^3$ sur U ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant 0. Si Df(0)=0 et $D^2f(0)$ est non-dégénérée avec*

$sign(D^2f(0)) = (p, n-p)$ alors il existe φ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme entre 2 voisinages de 0 dans $\mathbb{R}^n$ tel que $\varphi(0) = 0$ et

$$f(x) - f(0) = u_1^2 + \cdots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \cdots - u_n^2$$

où $u = \varphi(x)$

Lemme 38. *Soit $A_0 \in GL_n(\mathbb{R}) \cap S_n(\mathbb{R})$ alors il existe un voisinage V de A_0 dans $S_n(\mathbb{R})$ et $\phi \in \mathcal{C}^1(V, GL_n(\mathbb{R}))$ tels que :*

$$\forall A \in V,\ A =^t \phi(A) A_0 \phi(A)$$

Démonstration du Lemme. $\varphi : \begin{array}{ll} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow S_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto^t MA_0M \end{array}$ est polynomiale donc $\mathcal{C}^1$.
Soit $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} \varphi(I_n + H) - \varphi(I_n) &=^t (I_n + H)A_0(I_n + H) - A_0 \\ &= A_0 + A_0H +^t HA_0 +^t HA_0H - A_0 \\ &=^t HA_0 + A_0H + o(\|H\|) \end{aligned}$$

Or $A_0 \in S_n(\mathbb{R})$ donc ${}^tHA_0 =^t (A_0H)$, d'où

$$D\varphi(I_n)(H) =^t (A_0H) + A_0H$$

D'où $H \in Ker(D\varphi(I_n)) \Leftrightarrow A_0H \in A_n(\mathbb{R})$.
De plus, $D\varphi(I_n)$ est surjective car pour $A \in S_n(\mathbb{R})$, $D\varphi(I_n)(\frac{A_0^{-1}A}{2}) = A$

On pose $F = \{H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) | A_0H \in S_n(\mathbb{R})\}$.
On a $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R}) = F \oplus Ker(D\varphi(I_n))$
Soit $\psi : F \to S_n(\mathbb{R})$ la restriction de φ à F.
Sur F, $D\psi(I_n)$ est bijective car $Ker(D\varphi(I_n)) \cap F = \{0\}$.
Par le théorème d'inversion locale, il existe un voisinage ouvert U de I_n dans F (que l'on peut supposer contenu dans l'ouvert des matrices inversibles) tel que ψ soit un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$ de U sur $V = \psi(U)$.
Ainsi, V est un voisinage ouvert de $A_0 = \psi(I_n)$ dans $S_n(\mathbb{R})$ et $\forall A \in V$, $A =^t \psi^{-1}(A)A_0\psi^{-1}(A)$ d'où le résultat avec $\phi = \psi^{-1}$ □

Démonstration du Lemme de Morse. On écrit la formule de Taylor à l'ordre 1 avec reste intégral au voisinage de 0.

$$\begin{aligned} f(x) - f(0) &= Df(0)(x) + \int_0^1 (1-t)(D^2 f(tx))(x,x)dt \\ &= {}^t x \left(\int_0^1 (1-t) \left(D^2 f(tx) \right) dt \right) x \\ &= {}^t x Q(x) x \end{aligned}$$

Q est de classe $\mathcal{C}^1$. De plus, $Q(0) \in GL_n(\mathbb{R}) \cap S_n(\mathbb{R})$ car $Q(0) = \frac{D^2 f(0)}{2}$.
On peut donc appliquer le lemme précédent :
Il existe V un voisinage de $Q(0)$ dans $\mathbb{R}^n$ et $\Phi \in \mathcal{C}^1(V, GL_n(\mathbb{R}))$ tel que

$$\forall A \in V,\ A =^t \Phi(A) Q(0) \Phi(A)$$

De plus comme $Q : \begin{array}{ll} \mathbb{R}^n & \longrightarrow S_n(\mathbb{R}) \\ x & \longmapsto Q(x) \end{array}$ est continue, il existe un voisinage V_0 de 0 dans $\mathbb{R}^n$ tel que $V_0 \subset Q^{-1}(V)$.
Ainsi, $\forall x \in V_0$, $Q(x) \in V$, donc

$$Q(x) =^t \Phi(Q(x)) Q(0) \Phi(Q(x))$$

On pose $M(x) = \Phi(Q(x))$ et on obtient

$$Q(x) =^t M(x) Q(0) M(x)$$

Il s'ensuit que $f(x) - f(0) =^t yQ(0)y$ avec $y = M(x)x$.
D'autre part, d'après le théorème d'inertie de Sylvester, $\exists P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que

$${}^t P Q(0) P = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_{n-p} \end{pmatrix}$$

On a donc

$$f(x) - f(0) =^t (P^{-1}y)({}^t P Q(0) P)(P^{-1}y) =^t (P^{-1}y) \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_{n-p} \end{pmatrix} (P^{-1}y)$$

En posant $u = \varphi(x)$ avec $\varphi(x) = P^{-1}y = P^{-1}M(x)x$, on a bien

- $\varphi(0) = 0$
- $f(x) - f(0) = u_1^2 + \cdots + u_p^2 - u_{p+1}^2 \cdots - u_n^2$ où $u = \varphi(x)$

Il reste à montrer que φ définit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme entre deux voisinages de 0.
Calculons la différentielle à l'origine de φ :

$$\begin{aligned}
\varphi(h) - \varphi(0) =& P^{-1}M(h)h \\
=& P^{-1}(M(0) + DM(0).h + o(\|h\|)h \\
& \text{ car } M \text{ est différentiable en 0 puisque } f \text{ est } \mathcal{C}^3 \text{ sur } U \ni 0. \\
=& P^{-1}M(0)h + o(\|h\|)
\end{aligned}$$

Comme $P^{-1}M(0) \in GL_n(\mathbb{R})$, $D\varphi(0)$ est inversible et comme $\varphi(0) = 0$, d'après la théorème d'inversion locale, il existe deux voisinages de 0 tel que φ soit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme entre ces deux voisinages.
Le théorème est donc démontré.

□

Références

[1] Gourdon, *Algèbre*, (2ème édition)

[2] Gourdon, *Analyse*, (2ème édition)

[3] Grifone, *Algèbre linéaire*, (4ème édition)

[4] Audin, *Géométrie*

[5] Francinou, Gianella, Nicolas, *Oraux X-ENS Algèbre 3*

[6] Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation*, (3ème édition)