Leçon 155 Endomorphismes diagonalisables en dimension finie

Dorian Cacitti-Holland

2020-2021

Références.

1. Algèbre linéaire de Joseph Grifone
2. Algèbre et géométrie de Jean-Etienne Rombaldi
3. Algèbre linéaire Réduction d'endomorphisme de Mansuy et Mneimné
4. Histoires hédonistes de groupes et de géométries tome 1 de Caldero et Germoni
5. Oraux X-ENS algèbre 3

Développements.

1. Décomposition de Dunford-Jordan-Chevalley
2. Réduction dans $O_n(\mathbb{R})$

Table des matières

1 Eléments de description des endomorphismes en dimension finie (pas la place)

1.1 Valeurs, vecteurs et sous-espaces propres

(Chapitres 6.2 et 6.6 d'Algèbre linéaire de Joseph Grifone)
On considère E un K-espace vectoriel de dimension finie et $u \in End(E)$.

1. Définition : Soit $v \in E$, alors on dit que v est un vecteur propre de f si $v \neq 0$ et il existe $\lambda \in K$ tel que $u(v) = \lambda v$, de plus on dit que λ est une valeur propre de u, et on note $Sp(u)$ leur ensemble
2. Remarque : Les vecteurs propres sont non nuls par définition mais les valeurs propres peuvent être nulles
3. Exemple : Si $ker(u) \neq \{0\}$ alors u admet des vecteurs propres non nuls associés à la valeur propre 0
4. Remarque : Soit $v \in E$ vecteur propre de u associé à la valeur propre $\lambda \in K$, alors pour tout $\mu \in K^*$, μv est encore un vecteur propre de u associé à la valeur propre λ, en particulier $u(Vect(v)) \subset Vect(v)$
5. Exemple : Si $E = \mathbb{R}^3$ et u la projection sur un plan P parallèlement à une droite D, alors pour tout vecteur $v \neq 0$ de P, on a $u(v) = v$, et pour tout vecteur $v \in D$, on a $f(v) = 0$, d'où les seuls valeurs propres de u sont 1 et 0
6. Remarque : Il n'existe pas nécessairement de valeurs propres
7. Exemple : Si $E = \mathbb{R}^2$ et u la rotation d'angle $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$, alors u n'admet pas de vecteurs propres donc pas de valeurs propres
8. Proposition : Soit $\lambda \in K$, alors $E_\lambda := \{v \in E, u(v) = \lambda v\}$ est un sous-espace vectoriel appelé sous-espace propre de u associé à λ et $dim(E_\lambda)$ est appelé multiplicité géométrique de λ
9. Exemple : Si $\lambda \notin Sp(u)$ alors $E_\lambda = \{0\}$, sinon $dim(E_\lambda) \geq 1$
10. Théorème : Les sous-espaces propres de u sont en somme directe
11. Exemple : Si dans une base (e_1, e_2, e_3) de E, $Mat_e(u) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ avec $a \neq b$ alors $Sp(u) = \{a, b\}$, $E_a = Vect(e_1)$ et $E_b = Vect(e_2, e_3)$

1.2 Idéal des polynômes annulateurs et polynôme minimal

(Chapitres 19.2 et 20.1 d'Algèbre et géométrie de Jean-Etienne Rombaldi et I.2 et I.3 d'Algèbre linéaire de Mansuy et Mneimné)

1. Proposition : L'ensemble $I_u := \{P \in K[X], P(u) = 0\}$ est un idéal de l'anneau $K[X]$ princial, alors il existe un unique $\pi_u \in K[X]$ unitaire, appelé polynôme minimal de u, tel que $I_u = (\pi_u)$
2. Exemple : Si f nilpotent alors $\mu_f = X^k$, si f homothétie alors $\mu_f = X - \lambda$

3. Lemme : Soit F sous-espace de E stable par u, alors $u_{|F} \in End(F)$ et $\pi_{|u} \mid \pi_u$
4. Théorème : $Sp(u) = Z(\pi_u)$
5. Corollaire : Si u nilpotent alors $Sp(u) = \{0\}$
6. Définition : Soit $\lambda \in Sp(u)$, alors la multiplicité de λ en tant que racine de π_u est appelé multiplicité minimale de λ
7. Exemple : 0 est de multiplicité minimale q pour un endomorphisme nilpotent d'indice q
8. Proposition : $K[u]$ est un espace vectoriel et de base $(id_E, u, ..., u^{deg(\pi_u)}$ de dimension $dim(K[u]) = deg(\mu_u)$

1.3 Polynôme caractéristique et théorème de Cayley-Hamilton

(Chapitres 19.3 d'Algèbre et géométrie de Jean-Etienne Rombaldi, V.2 et VII.1 d'Algèbre linéaire de Mansuy et Mneimné et 6.3 d'Algèbre linéaire de Joseph Grifone)

Soit $A \in M_n(K)$.

1. Définition : Le polynôme caractéristique de A est $\chi_A = det(XI_n - A)$
2. Exemple : Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ alors $\chi_A = (X-2)(X-3)$
3. Proposition : Soit $B \in M_n(K)$ sembable à A, alors $\chi_A = \chi_B$
4. Définition : Le polynôme caractéristique de u est le polynôme caractéristique de $Mat_b(u)$ pour n'importe quelle base b de E
5. Exemple : Si u nilpotent alors $\chi_u = X^n$
6. Exemple : Si $dim(E) = 2$ alors $\chi_M = X^2 - tr(M)X + det(M)$
7. Proposition : Soit F sous-espace de E stable par u, alors $\chi_{u_{|F}} \mid \chi_u$
8. Théorème : $Sp(u) = Z(\chi_u)$
9. Définition : Soit $\lambda \in Sp(u)$, alors la multiplicité de λ en tant que racine de χ_u est appelé multiplicité algébrique de λ
10. Corollaire : Si $K = \mathbb{C}$ alors $Sp(u) \neq \varnothing$
11. Théorème de Cayley-Hamilton : $\chi_u(u) = 0$ ie $\chi_u \in I_u$ ie $\pi_u \mid \chi_u$

2 Diagonalisabilité

2.1 Critères de diagonalisabilité

(Chapitres VIII.1 d'Algèbre linéaire de Mansuy et Mneimné et 19.4 d'Algèbre et géométrie de Jean-Etienne Rombaldi)

1. Définition : On dit que u est diagonalisable s'il existe une base de E formée de vecteurs propres de u, et on dit que A est diagonalisable si A est semblable à une matrice diagonale

2. Remarque : Soit b base de E, alors u diagonalisable si et seulement si $Mat_b(u)$ diagonalisable
3. Lemme : Soit $P_1, ..., P_p \in K[X]\backslash\{0\}$ deux à deux premiers entre eux et $Q_k = \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{p} P_k$, alors $Q_1, ..., Q_p$ sont premiers entre eux dans leur ensemble
4. Théorème de décomposition des noyaux : Soit $P_1, ..., P_p \in K[X]\backslash\{0\}$ deux à deux premiers entre eux et $P = \prod_{k=1}^{n} P_k$, alors $ker(P(u)) = \bigoplus_{k=1}^{p} ker(P_k(u))$
5. Remarque : Ce théorème est valable en dimension infinie
6. Théorème : Les assertions suivantes sont équivalentes :
   — u diagonalisable
   — μ_f scindé à racines simples
   — Il existe $P \in K[X]$ scindé à racines simples tel que $P(f) = 0$
7. Exemple : Soit $A \in M_n(K)$ tel que $A^5 = I_n$, alors A est diagonalisable
8. Corollaire : Soit F sous-espace de E stable par u diagonalisable, alors $u_{|F}$ est diagonalisable
9. Corollaire : Si χ_u est scindé à racines simples alors u est diagonalisable mais la réciproque n'est pas vraie
10. Théorème : u est diagonalisable si et seulement si χ_u scindé et égalité entre multiplicité algébrique et mutiplicité géométrique des valeurs propres
11. Proposition : Si u admet n valeurs propres distinctes alors u est diagonalisable

2.2 Diagonalisabilité simultanée

(Chapitres VIII.2 d'Algèbre linéaire de Mansuy et Mneimné et 21.6 d'Algèbre et géométrie de Jean-Etienne Rombaldi)

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'endmorphismes de E.

1. Définition : On dit que $(u_i)_{i\in I}$ est codiagonalisable s'il existe une base b de E tel que pour tout $i \in I$, $Mat_b(u_i)$ soit diagonale
2. Proposition : Si $u_1 \circ u_2 = u_2 \circ u_1$ alors $Im(u_1)$ et les sous-espaces propres de u_1 sont u_2-stables
3. Proposition : Si $u_1 \circ u_2 = u_2 \circ u_1$ et u_1, u_2 diagonalisables alors u_1, u_2 sont codiagonalisables
4. Théorème : $(u_i)_{i\in I}$ est codiagonalisable si et seulement les u_i commutent deux à deux et sont diagonalisable
5. Application : Soit G un groupe abélien et (V, ρ) une représentation linéaire de G, alors (ρ, V) est irréductible si et seulement si $dim(V) = 1$
6. Corollaire : Soit $(A_i)_{i\in I}$, alors il existe $P \in GL_n(K)$ tel que pour tout $i \in I$, $P^{-1}A_iP$ soit diagonale si et seulement si les A_i commutent deux à deux et sont diagonalisables
7. Exemple : Soit $B, W \in M_n(K)$ diagonalisables, alors $M \in M_n(K) \longmapsto BMW \in M_n(K)$ est un endomorphisme diagonalisable

2.3 Diagonalisabilité et semi-simplicité

(Chapitre 19.7 d'Algèbre et géométrie de Jean-Etienne Rombaldi et Problème 4.5.19 d'Algèbre de Xavier Gourdon)

1. Définition : On dit que u est semi-simple si tout sous-espace vectoriel de E stable par u admet un supplémentaire stable par u
2. Exemple : Si u diagonalisable alors u semi-simple
3. Théorème : Si K est algébriquement clos alors u semi-simple si et seulement si u diagonalisable
4. Exemple : C'est le cas dans $M_n(\mathbb{C})$
5. Exemple : Dans $M_n(\mathbb{R})$ on a $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$, avec $\beta > 0$, non diagonalisable et semi-simple
6. Théorème : u semi-simple si et seulement si son polynôme minimal est sans facteur carré dans sa décomposition en irréductibles
7. Proposition : Si u semi-simple, soit F sous-espace de E stable par u, alors $u_{|F}$ est semi-simple

3 Utilisations de la diagonalisabilité

3.1 Décomposition de Dunford-Jordan-Chevalley

(Chapitres 19.5 d'Algèbre et géométrie de Jean-Etienne Rombaldi)

1. Proposition : Si u de polynôme annulateur scindé $P = \prod_{k=1}^{p}(X - \lambda_k)^{m_k} \in K[X]$, soit $N_k := ker((u - \lambda_k id_E)^k)$, alors $E = \bigoplus_{i=1}^{r} N_i$ et pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, le projecteur sur N_k parallèlement à $\bigoplus_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{p} N_j$ est un polynôme en u
2. Théorème de Dunford-Jordan-Chevalley : Soit $f \in End(E)$ tel que χ_f soit scindé sur K, alors il existe un unique couple $(d, n) \in (End(E))^2$ tel que d soit diagonalisable, n soit nilpotente, $u = d + n$ et $dn = nd$, de plus $d, n \in K[u]$
3. Remarque : On peut se passer de l'hypothèse χ_u scindé en remplaçant d diagonalisable par d semi-simple
4. Corollaire : Soit $A \in M_n(K)$ tel que χ_A soit scindé sur K, alors il existe un unique couple $(D, N) \in M_n(K)^2$ tel que $DN = ND$, D diagonalisable, N nilpotente et $A = D + N$, de plus D et N sont des polynôme en A
5. Exemple : Soit $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$, alors la décomposition de Dunford de A est $D = \begin{pmatrix} a & 1 & -\frac{1}{b-a} \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{b-a} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3.2 Calculs de puissances, d'inverses et d'exponentielles de matrices

1. Proposition : Si A diagonalisable $A = Pdiag(\lambda_1, ..., \lambda_n)P^{-1}$, alors $A^k = Pdiag(\lambda_1^k, ..., \lambda_n^k)P^{-1}$
2. Exemple : Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ alors A diagonalisable $A = Pdiag(0, 2)P^{-1}$, donc $A^k = Pdiag(0, 2^k)P^{-1}$
3. Proposition : Si A diagonalisable alors $A \in GL_n(K)$ si et seulement si $0 \notin Sp(A)$, dans ce cas $A^{-1} = P^{-1}diag(\lambda_1^{-1}, ..., \lambda_n^{-1})P$
4. Exemple : Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ alors A diagonalisable inversible $A = Pdiag(\alpha, \beta)P^{-1}$, donc $A^{-1} = P^{-1}diag(\alpha^{-1}, \beta^{-1})P$
5. Proposition : Si A diagonalisable $A = Pdiag(\lambda_1, ..., \lambda_n)P^{-1}$ alors on a $exp(A) = Pdiag(e^{\lambda_1}, ..., e^{\lambda_n})P^{-1}$
6. Exemple : Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ alors A diagonalisable $A = Pdiag(0, 2)P^{-1}$, donc $exp(A) = Pdiag(1, e^2)P^{-1}$
7. Proposition : Si $A = D + N$ est la décomposition de Dunford de A alors $exp(A) = exp(D)exp(N)$ (car D, N commutent)

3.3 Propriétés topologiques dans $M_n(K)$

(Chapitre 21.6 d'Algèbre et géométrie de Jean-Etienne Rombaldi)

1. Remarque : On considère une norme sur $M_n(K)$ pour obtenir une topologie sur $M_n(K)$, le choix de la norme n'est pas important car elles sont toutes équivalentes en dimension finie
2. Définition : On note $D_n(K))$ l'ensemble des matrices diagonalisables, $D'_n(K)$ l'ensemble des matrices ayant n valeurs propres distinctes et $T_n(K)$ celles trigonalisables
3. Théorème : $D_n(\mathbb{C})$ et $D'_n(\mathbb{C}$ sont denses dans $M_n(\mathbb{C})$
4. Remarque : Ce théorème n'est pas vérifié sur $\mathbb{R}$
5. Exemple : $D_2(\mathbb{R})$ n'est pas dense dans $M_2(\mathbb{R})$
6. Théorème : $T_n(\mathbb{R})$ est fermé dans $M_n(\mathbb{R})$, c'est l'adhérence de $D_n(\mathbb{R})$
7. Théorème : L'application $M \in M_n(K) \longmapsto \chi_M \in K_n[X]$ est continue en fixant une norme sur $K_n[X]$ de dimension finie
8. Corollaire : L'application $M \in M_n(\mathbb{C}) \longmapsto \pi_A \in \mathbb{C}_n[X]$ n'est pas continue

4 Diagonalisation dans un espace euclidien

4.1 Orthodiagonalisation des endomorphismes symétriques

(Chapitres 22.6, 22.7 et 22.9 d'Algèbre et géométrie de Jean-Etienne Rombaldi)
On considère E un espace vectoriel euclidien.

1. Définition : Soit $u \in End(E)$, alors on dit que u est symétrique si $\langle u(x), y \rangle x, u(x) \rangle$, ie $u^* = u$, et on note $S(E)$ leur ensemble
2. Exemple : Les dilatations sont des endomorphismes symétriques
3. Théorème : Soit $u \in End(E)$, alors $u \in S(E)$ si et seulement si sa matrice dans toute base orthonormale de E est symétrique
4. Corollaire : $dim(S(E)) = \frac{n(n+1)}{2}$
5. Lemme : Soit $u \in S(E)$, alors $Sp(u) \subset \mathbb{R}$
6. Lemme : Soit $u \in S(E)$ et $\lambda, \mu \in Sp(u)$ distincts, alors $E_\lambda = ker(u - \lambda id_E)$ et $E_\mu = ker(u - \mu id_E)$ sont orthogonaux
7. Théorème spectral : Soit $u \in S(E)$, alors u est diagonalisable dans une base orthonormée de E
8. Corollaire : Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ symétrique, alors il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $D \in M_n(\mathbb{R})$ diagonale tels que $A = PD^tP$
9. Corollaire : Soit $(u_i)_{i \in I} \in S(E)^I$, alors il existe une base orthonormale de diagonalisation commune aux u_i si et seulement si les u_i commutent entre eux deux à deux

4.2 Presque orthodiagonalisation des endomorphismes orthogonaux

(Chapitres 22.3 et 22.4 d'Algèbre et géométrie de Jean-Etienne Rombaldi)

1. Définition : Soit $u \in End(E)$, alors on dit que u est orthogonal si $\langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$, et on note $O(E)$ leur ensemble
2. Exemple : Les seules homothéties dans $O(E)$ sont id_E et $-id_E$
3. Théorème : Soit $u \in End(E)$, alors $u \in O(E)$ si et seulement si $\|u(x)\| = \|x\|$
4. Corollaire : Soit $u \in O(E)$, alors $u \in GL(E)$ et $u^* = u^{-1}$
5. Théorème : Soit $u \in End(E)$, alors $u \in O(E)$ si et seulement si u envoie toute base orthonormale de E sur une base orthonormale de E
6. Exemple : Si $dim(E) = 2$, soit $u \in End(E)$ rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$, alors $u \in O(E)$
7. Théorème : Soit $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ base orthonormée de E et $u \in End(E)$ tel que $Mat_e(u) = A$, alors $u \in O(E)$ si et seulement si $A^tA = {}^tAA = I_n$
8. Corollaire : Soit $u \in End(E)$, alors $det(u) \in \{-1, 1\}$
9. Lemme : Soit $u \in O(E)$, alors $Sp(u) \subset \{-1, 1\}$
10. Lemme : Soit $u \in O(E)$, alors il existe des sous-espaces vectoriels $F_1, ..., F_r$ de E deux à deux orthogonaux de dimension 1 ou 2 et stables par u tels que $E = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i$
11. Proposition : Soit $u \in O(E)$ et F sous-espace vectoriel de E stable par F, alors $F^\perp$ est stable par u
12. Théorème de réduction des endomorphismes orthogonaux : Soit $u \in O(E)$, alors il existe une base orthonormée e de E telle que $Mat_e(u) = diag(I_p, I_q, R_1, ..., R_r)$ avec $p, q \in [\![1, n]\!], R_i = R(\theta_i), \theta_i \in \,]0, 2\pi[\, \backslash \{\pi\}$

4.3 Compacité de $O_n(\mathbb{R})$ et décomposition polaire

(Chapitres 22.3 et 22.9 d'Algèbre et géométrie de Jean-Etienne Rombaldi, II.3 et II.4 de Histoires hédonistes de groupes et de géométries tome 1 de Caldero et Germoni et Exercice 2.28 de Oraux X-ENS algèbre 3)

1. Théorème : $O(E)$ est un sous-groupe compact de $GL(E)$
2. Définition : Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$, alors on dit que S est positive (respectivement définie positive) si $\forall x \in \mathbb{R}^n, \langle Ax, x\rangle \geq 0$ (respectivement $\forall x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}, \langle Ax, x\rangle > 0$)
3. Exemple : Si φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ alors $(\varphi(e_i, e_j))_{1\leq i,j\leq n}$ est symétrique définie positive
4. Théorème : Soit $A \in S_n^+(\mathbb{R})$, alors il existe $B \in S_n^+(\mathbb{R})$ unique tel que $A = B^2$, de plus B est un polynôme en A
5. Théorème de décomposition polaire : Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$, alors il existe un unique couple $(O, S) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $A = OS$
6. Exemple : Si $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ alors $A = OS$ avec $O = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$
7. Corollaire : $A \in GL_n(\mathbb{R}) \longmapsto (O, S) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$ réalise un homéomorphisme
8. Corollaire : Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, alors il existe $(O, S) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^+(\mathbb{R})$ tel que $A = OS$
9. Application : Les points extremaux de $B := \{u \in L(E), \|u\| \leq 1\}$, ie les $u \in B$ tels que $B\backslash\{u\}$ soit convexe, sont exactement les éléments de $O(E)$