Leçon 156 Exponentielle de matrices, applications

Dorian Cacitti-Holland

2020-2021

Références.

1. Algèbre et géométrie de Jean-Etienne Rombaldi
2. Algèbre linéaire de Joseph Grifone
3. Histoires hédonistes de groupes et de géométries tome 1 de Caldero et Germoni
4. Analyse sur les groupes de Lie de Jacques Faraut
5. Equations différentielles de Florent Berthelin
6. Petit guide de calcul différentiel de François Rouvière

Développements.

1. Différentielle de l'exponentielle matricielle
2. Homéomorphimse de $exp : S_n(\mathbb{R}) \longrightarrow S_n^{++}(\mathbb{R})$

Table des matières

1 Exponentielle matricielle

1.1 Série matricielle

(Chapitre 23.1 d'Algèbre et géométrie de Rombaldi)
On considère $A \in M_n(K)$ avec K le corps des réels ou des complexes.

1. Définition : Le spectre de A est $Sp(A)$ l'ensemble de ses valeurs propres, et la rayon spectral de A est $\rho(A) = \underset{\lambda \in Sp(A)}{max} |\lambda|$
2. Proposition : $\rho(A^k) = (\rho(A))^k$ et pour toute norme matricielle $\rho(A) \leq \|A\|$
3. Lemme : Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, alors il existe une norme matricielle $\|\cdot\|$ telle que $\|A\| \leq \rho(A) + \varepsilon$
4. Théorème : Soit $\sum a_k z^k$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, si $\rho(A) < R$ alors $\sum a_k A^k$ est normalement convergente et si $\rho(A) > R$ alors $\sum a_k A^k$ est divergente
5. Corollaire : Dans le premier cas $f(A) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k A^k$ est un polynôme en A
6. Théorème : Soit $\sum a_k z^k$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, f sa somme, si $\rho(A) = 0$ alors $\varphi(t) = f(tA)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et si $0 < \rho(A) < R$ alors φ est de classe C^∞ sur $\left]-\frac{R}{\rho(A)}, \frac{R}{\rho(A)}\right[$, dans les deux cas $\varphi'(t) = Af'(tA)$ avec $f'(z) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} k a_k z^{k-1}$
7. Exemple : Si $\rho(A) < 1$ alors $I_n - A \in GL_n(K)$ et $(I_n - A)^{-1} = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} A^k$

1.2 Définition et propriétés de l'exponentielle matricielle

(Chapitres 23.2 d'Algèbre et géométrie de Rombaldi et A.9 d'Algèbre linéaire de Joseph Grifone)

1. Proposition : La série entière $\sum \frac{z^k}{k!}$ est de rayon de convergence $+\infty$, donc $\sum \frac{A^k}{k!}$ est convergente et sa somme est appelée $exp(A)$
2. Exemple : Soit $\lambda \in K$, alors $exp(\lambda I_n) = e^\lambda I_n$
3. Théorème : $det(exp(A)) = e^{tr(A)}$
4. Corollaire : e^A est inversible
5. Proposition : Soit $B \in M_n(K)$ tel que $AB = BA$, alors $exp(A + B) = exp(A)exp(B)$
6. Corollaire : $exp(A)^{-1} = exp(-A)$
7. Corollaire : exp n'est pas un morphisme de groupes de $M_n(K)$ dans $GL_n(K)$
8. Exemple : $exp\begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix} = R(\theta)$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \theta & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = B + C$ mais $exp(A) \neq exp(B)exp(C)$
9. Proposition : Soit $P \in GL_n(K)$ et $B := P^{-1}AP$, alors $exp(B) = P^{-1}exp(A)P$
10. Application : La réduction de A en matrice diagonale ou en blocs de Jordan permet de calculer plus facilement $exp(A)$

1.3 Calcul par décomposition de Dunford-Jordan-Chevalley

(Chapitres 19.5 et 23.3 d'Algèbre et géométrie de Jean-Etienne Rombaldi)

1. Proposition : Si A de polynôme annulateur scindé $P = \prod_{k=1}^{p}(X-\lambda_k)^{m_k} \in K[X]$, soit $N_k := ker((A-\lambda_k I_n)^k)$, alors $K^n = \bigoplus_{i=1}^{r} N_i$ et pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, le projecteur sur N_k parallèlement à $\bigoplus_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{p} N_j$ est un polynôme en A
2. Théorème de Dunford-Jordan-Chevalley : Si χ_A scindé sur K, alors il existe un unique couple $(D,N) \in (M_n(K))^2$ tel que D soit diagonalisable, N soit nilpotente, $A = D+N$ et $DN + ND$, de plus $D, N \in K[A]$
3. Remarque : On peut se passer de l'hypothèse χ_A scindé en remplaçant D diagonalisable par D semi-simple
4. Exemple : Soit $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$, alors la décomposition de Dunford de A est $D = \begin{pmatrix} a & 1 & -\frac{1}{b-a} \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{b-a} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
5. Corollaire : Dans ce cas $exp(A) = exp(D)\sum_{k=0}^{q-1}\frac{N^k}{k!}$ et la décomposition de Dunford de $exp(A)$ est $exp(A) = exp(D) + exp(D)(exp(N) - I_n)$
6. Corollaire : Dans ce cas A diagonalisable si et seulement si $exp(A)$ l'est

2 Propriétés de l'exponentielle matricielle

2.1 Régularité

(Chapitre 23.2 Algèbre et géométrie de Jean-Etienne Rombaldi)

1. Théorème : $exp : A \in M_n(K) \longmapsto exp(A) \in M_n(K)$ est continue
2. Proposition : exp est différentiable en 0 est $dexp(0) = I_n$
3. Corollairee : exp réalise un C^1 difféomorphisme d'un voisinage de O dans $M_n(K)$ dans un voisinage de I_n dans $GL_n(K)$
4. Théorème : $exp : A \in M_n(K) \longmapsto exp(A) \in M_n(K)$ est de classe C^1 sur $M_n(K)$ et $dexp(A)(H) = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k!}\left(\sum_{\substack{0\leq i,j\leq k-1 \\ i+j=k-1}}\right)A^iHA^j$
5. Corollaire : $\frac{d}{dt}(e^{tA}) = Ae^{tA}$

2.2 Injectivité et surjectivité

(Chapitres 23.4 d'Algèbre et géométrie de Jean-Etienne Rombaldi et VI.2 de Histoires hédonistes de groupes et de géométries tome 1 de Caldero et Germoni)

On considère $K = \mathbb{C}$.

1. Proposition : $exp : M_n(K) \longrightarrow M_n(K)$ n'est pas injective
2. Exemple : $exp\begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix} = R(\theta) = R(\theta + 2\pi) = exp\begin{pmatrix} 0 & -\theta - 2\pi \\ \theta + 2\pi & 0 \end{pmatrix}$
3. Lemme : Si $A \in GL_n(K)$ diagonalisable alors il existe $Q \in K_{n-1}[X]$ tel que $Q(A)$ soit diagonalisable et $exp(Q(A)) = A$
4. Théorème : Si $A \in GL_n(K)$ alors il existe $Q \in K[X]$ tel que $exp(Q(A)) = A$
5. Corollaire : exp réalise une surjection de $M_n(K)$ sur $GL_n(K)$
6. Application : $GL_n(K)$ est connexe par arcs
7. Application : Si $A \in GL_n(K)$ alors il existe $B \in GL_n(K)$ tel que $B^p = A$

2.3 Bijections entre sous-ensembles matricielles

(Chapitres 23.4 d'Algèbre et géométrie de Rombaldi et VI.2 de Histoires hédonistes de groupes et de géométries tome 1 de Caldero et Germoni)

1. Définition : On note $N_n(K)$ l'ensemble des matrices nilpotentes et $L_n(K)$ celui des matrices unipotentes ie l'ensemble des $A \in M_n(K)$ tel que $A - I_n$ soit nilpotente
2. Proposition : La série $\sum \frac{(1)^{k-1}}{k} z^k$ est convergente sur $D(0,1)$ et sa fonction somme est $ln(1+z)$
3. Définition : Si $\rho(A) < 1$ alors $ln(I_n + A) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} A^k$
4. Exemple : $ln(I_n) = 0$ et si A nilpotente d'indice q alors $ln(I_n + A) = \sum_{k=1}^{q-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} A^k$
5. Lemme : Si $\rho(A) < 1$ alors $exp(ln(I_n + A)) = I_n + A$
6. Proposition : Si $A \in N_n(K)$ alors $exp(A) \in L_n(K)$ est $ln(exp(A)) = A$
7. Théorème : exp réalise une bijection de $N_n(K)$ sur $L_n(K)$ d'inverse ln
8. Corollaire : Soit $\lambda \in K^*$, si $A \in N_n(K)$ alors il existe $X \in M_n(K)$ tel que $exp(X) = \lambda I_n + A$
9. Théorème : $exp : S_n(\mathbb{R}) \longrightarrow S_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme
10. Remarque : De même $exp : H_n(\mathbb{C}) \longrightarrow H_n^{++}(\mathbb{C})$ est un homéomorphisme
11. Lemme : Théorème de décomposition polaire : Si $A \in GL_n(K)$ alors il existe $S \in S_n(\mathbb{R}), O \in O_n(\mathbb{R})$ uniques tels que $A = OS$
12. Corollaire : $GL_n(\mathbb{R}) \simeq O_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ et $GL_n(\mathbb{C}) \simeq U_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$

3 Applications aux équations différentielles

3.1 Système différentiel linéaire à coefficients constants

(Chapitres A.6 d'Algèbre linéaire de Joseph Grifone et III.1 d'Analyse sur les groupes de Lie de Jacques Faraut)

1. Lemme : $\frac{d}{dt}(e^{tA}) = Ae^{tA}$
2. Théorème : Soit $\frac{dx}{dt} = Ax$ un système différentielle linéaire à coefficients constants avec $A \in M_n(\mathbb{C})$ et d'inconnue $x \in \mathbb{C}^n$, et $x_0 \in \mathbb{C}^n$, alors il existe une unique solution x telle que $x(0) = x_0$, elle est donnée par $x(t) = e^{tA}x_0$
3. Exemple : Si $A = \begin{pmatrix} b & a & \dots & \dots & a \\ a & b & \ddots & (a) & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & (a) & \ddots & \ddots & a \\ a & \dots & \dots & a & b \end{pmatrix}$ et $x_0 \in H$ avec H hyperplan d'équation $x_1 + ... + x_n = 0$n alors la solution est $x(t) = e^{(b-a)t}x_0 \in H$
4. Corollaire : Soit $\frac{dx}{dt} = Ax$ système différentiel linéaire à coefficients constants, si une solution passe à un instant donné par un sous-espace propre E_λ de A alors elle reste dans E_λ
5. Corollaire : Soit $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow GL_n(\mathbb{R})$ un morphisme de groupes continu, alors γ est de classe C^∞, $\forall t \in \mathbb{R}, \gamma(t) = e^{tA}$ avec $A = \gamma'(0)$

3.2 Cas des systèmes linéaires à coefficients constants dans $\mathbb{R}^2$

(Chapitres 5.4 d'Equations différentielles de Florent Berthelin et A.13 d'Algèbre linéaire de Joseph Grifone)

On considère $A \in M_2(K)$ et y solution de $y' = Ay$.

1. Proposition : Si A a deux valeurs propres réelles distinctes λ_1 et λ_2, soit v_1 et v_2 deux vecteurs propres associés, alors $y = c_1e^{\lambda_1 t}v_1 + c_2e^{\lambda_2 t}v_2$
2. Corollaire : Dans ce cas, si :
   — $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ alors 0 est un point d'équilibre asymptotiquement stable
   — $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ alors 0 est un point d'équilibre instable
   — λ_1 et λ_2 de signes contraires alors 0 est un point col
3. Proposition : Si A a deux valeurs propres complexes conjugués λ et $\overline{\lambda}$, soit v_1 et v_2 deux vecteurs propres associés alors $x = ce^{\lambda t}v_1 + \overline{c}e^{\overline{\lambda}t}v_2 = \xi_1 w_1 + \xi_2 w_2$ avec $w_1, w_2 \in (\mathbb{R}^2)^2$
4. Corollaire : Dans ce cas, en coordonnées polaires, la trajectoire est décrite par $\xi = ce^{\lambda t}$, et on peut obtenir des spirales logarithmiques, 0 foyer stable, instable ou des solutions périodiques
5. Proposition : Si A a une unique valeur propre réelle alors :
   — Si A est diagonalisable alors les trajectoires sont des demi-droites partant de l'origine
   — Si A n'est pas diagonalisable alors 0 est un noeud dégénéré stable ou instable

3.3 Stabilité d'un système différentiel par un système linéaire

(Chapitres 6.1 de Equations différentielles de Florent Berthelin et exercice 3.46 du Petit guide de calcul différentiel de François Rouvière)

1. Théorème : Si $f(y) = Ay$ avec $A \in M_N(\mathbb{C})$ de valeurs propres $\lambda_1, ...\lambda_m$ alors les solutions de $y' = Ay$ sont
   — Stables si et seulement si pour tout $j \in [\![1, m]\!]$, $Re(\lambda_j) < 0$ ou le bloc de Jordan correspondant est diagonalisable
   — Asymptotiquement stables si et seulement si $\forall j \in [\![1, m]\!], Re(\lambda_j) < 0$
2. Théorème de stabilité de Liapounov : Si $f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ est de classe C^1, $f(0) = 0$ et $A = Df(0)$ de valeurs propres dans $\mathbb{R}_-^* + i\mathbb{R}$ alors 0 est une solution asymptotiquement stable de $y' = Ay$
3. Exemple : Soit $y'' + Csin(y) = 0$ avec $C \in \mathbb{R}_+^*$, alors 0 est un point d'équilibre asymptotiquement stable (Exercice 6.5 d'Equations différentielles de Florent Berthelin)