Leçon 157 Endomorphismes trigonalisables, endomorphismes nilpotents

Dorian Cacitti-Holland

2020-2021

Références.

1. Algèbre et géométrie de Jean-Etienne Rombaldi
2. Algèbre linéaire de Joseph Grifone
3. Cours d'algèbre de Daniel Perrin
4. Algèbre de Xavier Gourdon

Développements.

1. Réduction de Jordan
2. Décomposition de Dunford-Jordan-Chevalley

Table des matières

1 Endomorphismes trigonalisables

1.1 Définitions et propriétés

(Chapitres 21.1 et 21.2 d'Algèbre et géométrie de Jean-Etienne Rombaldi et 6.8 d'Algèbre linéaire de Joseph Grifone)

On considère E un K-espace vectoriel de dimension finie n, $u \in End(E)$ et $A \in M_n(K)$.

1. Définition : On dit que u est trigonalisable s'il existe b de E tel que $Mat_b(u)$ soit triangulaire, de plus on dit que A est trigonalisable si A est semblable à une matrice triangulaire
2. Remarque : Soit b base de E, alors u trigonalisable si et seulement si $Mat_b(u)$ trigonalisable
3. Proposition : Si A est trigonalisable de matrice triangulaire T alors les coefficients diagonaux de T sont les valeurs propres de A
4. Corollaire : Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ de valeurs propres complexes non réelles alors A n'est pas trigonalisable
5. Exemple : Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ alors $Sp(A) = \{i, -i\}$ et A n'est pas trigonalisable
6. Lemme : Si le polynôme caractéristique χ_u est scindé sur K alors il existe un hyperplan de E stable par u
7. Théorème : u est trigonalisable si et seulement si χ_u est scindé sur K
8. Corollaire : Si K est algébriquement clos (par exemple si $K = \mathbb{C}$) alors u est trigonalisable
9. Corollaire : Si u trigonalisable, soit F sous-espace vectoriel de E stable par u, alors $u_{|F}$ est trigonalisable
10. Application : Si u est trigonalisable alors $tr(u) = \sum_{\lambda \in Sp(u)} \lambda$ et $det(u) = \prod_{\lambda \in Sp(u)} \lambda$

1.2 Conséquences topologiques

(Chapitre 21.7 d'Algèbre et géométrie de Jean-Etienne Rombaldi)

1. Remarque : On considère une norme sur $M_n(\mathbb{C})$, le choix n'est pas important car elles sont équivalentes en dimension finie
2. Définition : On note $T_n(K)$ l'ensemble des matrices trigonalisables sur K, $D_n(K)$ celui des diagonalisables et $D'_n(K)$ celui des matrices de valeurs propres distinctes
3. Théorème : $D'_n(\mathbb{C})$ et $D_n(\mathbb{C}$ sont dense dans $M_n(\mathbb{C})$
4. Théorème : $T_n(\mathbb{R})$ est fermé dans $M_n(\mathbb{R})$ et $T_n(\mathbb{R}) = \overline{D_n(\mathbb{R})}$
5. Proposition : L'application $M \in M_n(K) \longmapsto K_n[X]$ est continue
6. Corollaire : L'application $A \in M_n(\mathbb{C}) \longmapsto \pi_A \in K_n[X]$ n'est pas continue

1.3 Exemple intéressant des transvections

(Chapitre IV.2.b et IV.2.d du Cours d'algèbre de Daniel Perrin)

1. Lemme : Soit H sous-espace de E, alors H est un hyperplan si et seulement si H est le noyau d'une forme linéaire non nulle $\varphi \in E^*$
2. Proposition : Soit $H = ker(\varphi)$ hyperplan de E et $u \in GL(E) \backslash \{id_E\}$ tel que $u_{|H} = id_H$, alors $det(u) = 1$ si et seulement si u n'est pas diagonalisable si et seulement si $D := Im(u - id_E) \subset H$ si et seulement s'il existe $a \in H \backslash \{0\}$ tel que $u(x) = x + f(x)a$ si et seulement si dans une base b de E $Mat_b(u) = I_n + E_{n-1,n}$
3. Définition : Dans ce cas, on dit que u est une transvection d'hyperplan H et de droite D
4. Proposition : Si $u \in GL(E) \backslash \{id_E\}$, alors u est une transvection de droite D si et seulement si $u_{|D} = id_D$ et le morphisme induit $\overline{u} : E/D \longrightarrow E/D$ est l'identité
5. Lemme : Soit $x, y \in E \backslash \{0\}$, alors il existe u transvection ou un produit de deux transvections tel que $u(x) = y$
6. Théorème : Les transvections engendrent $SL(E)$
7. Corollaire : Les transvections et les dilations engendrent $GL(E)$

2 Endomorphismes nilpotents

2.1 Définition et propriétés

(Chapitre 20.2 d'Algèbre et géométrie de Jean-Etienne Rombaldi)
Soit $u \in End(E)$.

1. Définition : On dit que u est nilpotent s'il existe $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^q = 0$ et $u^{q-1} \neq 0$, dans ce cas on appelle q l'indice de nilpotence de u
2. Exemple : Dans K^n la matrice triangulaire supérieure dont seule la sur diagonale est non nulle est nilpotente d'indice $n - 1$
3. Lemme : Si u nilpotent alors 0 est valeur propre de u et $tr(u) = 0$
4. Théorème : Si K est algébriquement clos ($\mathbb{C}$ par exemple alors u nilpotent si et seulement si O est la seule valeur propre de u
5. Remarque : Dans $\mathbb{R}$ ce théorème n'est pas vérifié
6. Exemple : Dans $\mathbb{R}^3$ soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\theta) & -sin(\theta) \\ 0 & sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix}$ avec $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$, alors 0 est la seule valeur propre de A mais A n'est pas nilpotente
7. Théorème : Si K est de caractéristique nulle alors u nilpotent si et seulement si $\forall k \in [\![1, n]\!], tr(u^k) = 0$

2.2 Réduction de Jordan d'un endomorphisme nilpotent

(Chapitres 21.3 d'Algèbre et géométrie de Jean-Etienne Rombaldi et 6.14 d'Algèbre linéaire de Joseph Grifone)

1. Définition : L'adjoint de u est l'application de E^* défini par ${}^tu(\varphi) = \varphi \circ u$
2. Proposition : ${}^tu \in End(E^*)$
3. Lemme : Si u nilpotent d'indice q alors son adjoint ${}^tu : \varphi \in End(E^*)$ aussi
4. Lemme : Si u nilpotent d'indice q alors il existe $x \in E$ tel que $u^{q-1}(x) \neq 0$, $(x, u(x), ..., u^{q-1}(x))$ libre et $F = Vect(x, u(x), ..., u^{q-1}(x))$ soit u-stable
5. Proposition : Si u nilpotent d'indice q alors il existe $\varphi \in E^*, x \in E$ tels que $F = Vect(x, u(x), ..., u^{q-1}(x))$ et $G = {}^{\perp}Vect(\varphi, {}^t u(\varphi), ..., ({}^tu)^{q-1}(\varphi))$ soient u-stable et $E = F \otimes G$
6. Théorème : Si u nilpotent d'indice q alors il existe une base $b = b_1 \cup ... \cup b_r$ de E telle que les $E_i := Vect(b_i)$ soient u-stables et $Mat_{b_i}(u_{|E_i})$ soit triangulaire inférieure dont la sous diagonale est composée uniquement de 1 et dont les autres coefficients sont nuls

3 Utilisation en réduction et décomposition d'endomorphismes

3.1 Diagonalisation par blocs triangulaires et sous-espaces caractéristiques

(Chapitres 4.4 d'Algèbre de Xavier Gourdon et 6.12 d'Algèbre linéaire de Joseph Grifone)

1. Définition : Si $\chi_u = (X - \lambda_1)^{\alpha_1}...(X - \lambda_p)^{\alpha_p}$ alors $N_{\lambda_i} := ker((u - \lambda_i id_E)^{\alpha_i})$ est appelé sous-espace caractéristique
2. Proposition : Dans ce cas $E = \bigoplus_{i=1}^{p} N_{\lambda_i}$
3. Remarque : Soit $\lambda \in Sp(u)$, alors $E_\lambda \subset N_\lambda$ et $u(N_\lambda) \subset N_\lambda$
4. Lemme : Si $E = E_1 \otimes ... \otimes E_p$ avec E_i sous-espace vectoriel de E stable par u de base b_i et $M_i = Mat_{b_i}(u_{|E_i})$ alors $Mat_b(u) = diag(M_1, ..., M_p)$
5. Théorème : Si χ_u scindé alors il existe une base $b = b_1 \cup ... \cup b_p$ une base de E avec b_i base de N_i telle que $Mat_b(u)$ soit diagonale par blocs $\lambda_i I_{\alpha_i} + N_i$ avec N_i triangulaire supérieure de diagonale nulle
6. Exemple : Si $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ alors dans la base b donnée par la famille $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$, on a $Mat_b(u_A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

7. Application : A partir d'une matrice réduite par blocs diagonaux $B = diag(M_1, ..., M_p)$, on peut calculer $exp(B) = diag(exp(M_1), ..., exp(M_p))$

3.2 Réduction de Jordan

(Chapitre 21.4 d'Algèbre et géométrie de Jean-Etienne Rombaldi)

1. Théorème : Si χ_u scindé alors il existe une base b de E telle que $Mat_b(u)$ soit diagonale par blocs de Jordan
2. Corollaire : Soit $A \in M_n(K)$ avec K algébriquement clos, alors A est semblable à une matrice diagonale par blocs de Jordan
3. Remarque : On retrouve le théorème de diagonalisation par blocs triangulaires
4. Proposition : Une méthode pour déterminer la forme de Jordan associée à $A \in M_n(K)$:
   - Calculer χ_A, en déduire les valeurs propres et leurs multiplicités algébriques
   - Pour chaque $\lambda \in Sp(A)$, déterminer une base de $E_\lambda = ker(A - \lambda I_n)$, ainsi le nombre de blocs de Jordan associé à λ est $dim(E_\lambda)$
   - Pour chaque vecteur propre de la base de E_λ on construit le bloc de Jordan associé :
     - Si v_1 vecteur propre dans E_λ alors on cherche v_2 tel que $(A - \lambda I_n)v_2 = v_1$
     - Puis on cherche s'il existe v_3 tel que $(A - \lambda I_n)v_3 = v_2$
     - On arrête le processus s'il n'y a plus de solutions
     - Ainsi dans la base $(v_1, ..., v_p)$ la matrice asociée à A est le bloc de Jordan $\lambda I_p + J$
   - On recommence avec v_1' un autre vecteur de la base de E_λ, ...
   - On continue avec les autres valeurs propres
5. Exemple : On considère $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, alors $\chi_A = (X-1)^3$, puis $E_1 = Vect\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = Vect(v_1, v_1')$, puis le bloc de Jordan associé à v_1 est $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ car $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ verfie bien $(A - I_3)v_2 = v_1$, puis le bloc de Jordan associé à v_1' est (1), ainsi dans la base v_1, v_2, v_1' on obtient la réduite de Jordan de A

3.3 Décomposition de Dunford-Jordan-Chevalley

(Chapitres 19.5 d'Algèbre et géométrie de Jean-Etienne Rombaldi)

1. Proposition : Si u de polynôme annulateur scindé $P = \prod_{k=1}^{p}(X - \lambda_k)^{m_k} \in K[X]$, soit $N_k := ker((u - \lambda_k id_E)^k)$, alors $E = \bigoplus_{i=1}^{r} N_i$ et pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, le projecteur sur N_k parallèlement à $\bigoplus_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{p} N_j$ est un polynôme en u

2. Théorème de Dunford-Jordan-Chevalley : Soit $f \in End(E)$ tel que χ_f soit scindé sur K, alors il existe un unique couple $(d, n) \in (End(E))^2$ tel que d soit diagonalisable, n soit nilpotente, $u = d + n$ et $dn = nd$, de plus $d, n \in K[u]$
3. Remarque : On peut se passer de l'hypothèse χ_u scindé en remplaçant d diagonalisable par d semi-simple
4. Corollaire : Soit $A \in M_n(K)$ tel que χ_A soit scindé sur K, alors il existe un unique couple $(D, N) \in M_n(K)^2$ tel que $DN = ND$, D diagonalisable, N nilpotente et $A = D + N$, de plus D et N sont des polynôme en A
5. Exemple : Soit $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$, alors $D = \begin{pmatrix} a & 1 & -\frac{1}{b-a} \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{b-a} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

4 Un théorème pour les réduire tous

4.1 Matrice compagnon et endomorphismes cycliques

(Chapitre B.1 d'Algèbre de Xavier Gourdon)

1. Définition : Soit $x \in E$, alors π_x est le polynôme unitaire tel que $(\pi_x) = \{P \in K[X], P(u)(x) = 0\}$ et $E_x = \{P(u)(x), P \in K[X]$
2. Proposition : Soit $x \in E$, alors E_x est sous-espace de E de dimension $deg(\pi_x)$ et de base $(x, ..., u^{deg(\pi_x)-1})$
3. Théorème : Il existe $x \in E$ tel que $\pi_x = \pi_u$
4. Définition : On dit que u est cyclique s'il existe $x \in E$ tel que $E_x = E$
5. Définition : Soit $P = X^p + a_{p-1}X^{p-1} + ... + a_0 \in K[X]$, alors on note $C(P)$ sa matrice compagnon
6. Proposition : Soit $P \in K[X]$, alors $\pi_{C(P)} = \chi_{C(P)} = P$
7. Théorème : Si u cyclique alors il existe une base b de E tel que $Mat_b(u) = C(\pi_u)$

4.2 Invariants de similitude et réduction de Frobenius

(Chapitre B.2 d'Algèbre de Xavier Gourdon)

1. Théorème : Il existe $F_1, ..., F_r$ sous-espaces de E stables par u tels que $E = F_1 \otimes ... \otimes F_r$, $u_i := u_{|F_i}$ cyclique et $P_i := \pi_{u_i} \mid P_{i-1}$
2. Remarque : La suite des polynômes P_i ne dépend que de u
3. Définition : La suite des polynômes P_i est appelée les invariants de similitude de u
4. Théorème de réduction de Frobenius : Il existe une base b de E telle que $Mat_b(u) = diag(C(P_1), ..., C(P_r))$
5. Corollaire : Deux endomorphismes sont semblables si et seulement s'ils ont les mêmes invariants de similitude
6. Application : A partir de la réduction de Frobenius on peut retrouver le réduction de Jordan d'un endomorphisme nilpotent