# Leçon 158 Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes

Dorian Cacitti-Holland

2020-2021

**Références.**

1. Algèbre linéaire de Joseph Grifone
2. Algèbre et géométrie de Jean-Etienne Rombaldi
3. Oraux X-ENS Algèbre 3
4. Analyse matricielle de Jean-Etienne Rombaldi
5. Oraux X-ENS Analyse 4
6. Petit guide de calcul différentiel de François Rouvière
7. Probabilité de Barbe et Ledoux

**Développements.**

1. Homéomorphisme de $exp : S_n\mathbb{R}) \longrightarrow S_n^{++}(\mathbb{R})$
2. Décompositions LU et de Cholesky
3. Minimisation de fonctionnelle quadratiques
4. Lemme de Morse

## Table des matières

# 1 Algèbres linéaire et bilinéaire

## 1.1 Matrices symétriques réelles et hermitiennes

(Exercice 1.18 d'Algèbre linéaire de Joseph Grifone et Chapitre 8.3 d'Algèbre linéaire de Joseph Grifone)

1. Définition : Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, alors on dit que $A$ est symétrique (respectivement anti-symétrique) si ${}^tA = A$ (respectivement ${}^tA = -A$), on note $S_n(\mathbb{R})$ (respecitvement $A_n(\mathbb{R})$) leur ensemble
2. Exemple : Si $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ alors $A$ est symétrique
3. Proposition : $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de $M_n(\mathbb{R})$ de dimensions respectives $\frac{n(n+1)}{2}$ et $\frac{n(n-1)}{2}$
4. Corollaire : $M_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \otimes A_n(\mathbb{R})$
5. Exemple : $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$
6. Définition : Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$, alors on dit que $A$ est hermitienne si ${}^t\overline{A} = A$, on note $H_n(\mathbb{C})$ leur espace-vectoriel
7. Exemple : Les matrices symétriques réelles sont hermitiennes
8. Remarque : Les coefficients diagonaux d'une matrice hermitienne sont réels

## 1.2 Endomorphismes symétriques et hermitiens

(Chapitres 7.8, 7.13, 8.5 et 8.7 d'Algèbre linéaire de Joseph Grifone)
On considère $E_r$ un espace euclidien et $E_c$ un espace hermitien.

1. Théorème : Soit $f \in End(E_r)$, alors il existe un unique $f^* \in End(E_r)$ tel que $\langle f(x), y\rangle = \langle x, f^*(x)\rangle$
2. Définition : Dans ce cas $f^*$ est appelé l'adjoint de $f$, et si $f = f^*$ alors on dit que $f$ est auto-adjoint ou symétrique, on note $S(E_r$ leur espace vectoriel
3. Exemple : Une réflexion par rapport à un hyperplan est un endomorphisme symétrique
4. Remarque : Soit $f \in End(E_r)$, $e$ base orthonormée de $E_r$ et $A = Mat_e(f)$, alors $Mat_e(f^*) = {}^tA$
5. Proposition : Soit $f \in End(E_r)$, alors $f$ est symétrique si et seulement si la matrice qui la représente dans une base orthonormée de $E_r$ est symétrique
6. Théorème : Soit $f \in End(E_c)$, alors il existe un unique $f^* \in End(E_c)$ tel que $\langle f(x), y\rangle = \langle x, f^*(y)\rangle$
7. Définition : Dans ce cas $f^*$ est appelé l'adjoint de $f$, et si $f^* = f$ alors on dit que $f$ est auto-adjoint ou hermitien, on note $H(E_c)$ leur espace vectoriel
8. Proposition : Soit $f \in End(E_c)$, alors $f$ est hermitient si et seulement si la matrice qui le représente dans une base orthonormée est hermitienne

### 1.3 Formes bilinéaires symétriques et hermitiennes

(Chapitres 9.1, 9.2 et d'Algèbre linéaire de Joseph Grifone)

1. Définition : Soit $\varphi$ forme bilinéaire sur $E_r$ et $e$ base de $E$, alors $Mat_e(\varphi) = (\varphi(e_i, e_j))_{1 \leq i,j \leq n}$ est la matrice de $\varphi$ dans la base $e$
2. Définition : Dans ce cas, on dit que $\varphi$ est symétrique si $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$
3. Proposition : Soit $\varphi$ forme bilinéaire sur $E_r$, alors $\varphi$ est symétrique si et seulement si sa matrice dans une base quelconque est symétrique
4. Théorème : Soit $\varphi$ forme bilinéaire symétrique sur $E_r$, alors $q(x) = \varphi(x, x)$ définit une forme quadratique sur $E$, réciproquement toute forme quadratique est de cette forme (avec $\varphi$ unique)
5. Exemple : Soit $q(x) = 3x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_3^2 + 5x_1x_2 - 6x_1x_3 + 7x_2x_3$, alors $\varphi(x, y) = 5x_1y_1 + 2x_2y_2 - 3x_3y_3 + \frac{5}{2}x_1y_2 + \frac{5}{2}x_2y_1 - 3x_1y_3 - 3x_3y_1 + \frac{7}{2}x_2y_3 + \frac{7}{2}x_3y_2$
6. Définition : Soit $\varphi$ forme sesqui-linéaire sur $E_c$, alors on dit que $\varphi$ est hermitienne si $\varphi(x, y) = \overline{\varphi(y, x)}$
7. Proposition : Soit $\varphi$ forme sesqui-linéaire sur $E_c$, alors $\varphi$ est hermitienne si et seulement si sa matrice dans une base orthonormée est hermitienne

# 2 Réduction et décomposition

### 2.1 Signature et réduction d'une forme quadratique

(Chapitres 15.3 d'Algèbre et géométrie de Jean-Etienne Rombaldi et 9.5 d'Algèbre linéaire de Joseph Grifone)

1. Théorème : Soit $q$ une forme quadratique sur $E_c$, ie $q(x) = \varphi(x, x)$ avec $\varphi$ forme hermitienne sur $E_c$, alors il existe une base $e$ de $E$ tel que $q(x) = x_1^2 + ... + x_r^2$ avec $r = rg(q)$, autrement dit $Mat_\varphi(q) = Mat_e(q) = diag(I_r, 0_{n-r})$
2. Corollaire : Soit $H \in H_n(\mathbb{C})$, alors il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que $H = Pdiag(I_r, 0_{n-r})^tP$
3. Théorème : Si $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, alors il existe une base $e$ de $E$ tel que $q(x) = x_1^2 + ... + x_p^2 - x_{p+1}^2 - ... - x_r^2$, ie $Mat_e(q) = diag(I_p, I_{r-p}, 0_{n-r})$
4. Définition : Dans ce cas le couple $sign(q) = (p, r - p)$ est appelé signature de $q$
5. Corollaire : Dans ce cas $q$ est définie négative si et seulement si $sign(q) = (n, 0)$ si et seulement il existe une base orthonormée pour $q$, définie négative si et seulement si $sign(q) = (0, n)$, et non dégénéré si et seulement si $sign(q) = (p, n - p)$
6. Exemple : Si $q(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 15x_3^2 - 4x_1x_2 + 6x_1x_3 - 8x_2x_3$ alors $sign(q) = (2, 1)$
7. Corollaire : Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$, alors il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que $S = Pdiag(I_p, I_{r-p}, 0_{n-r})^tP$

### 2.2 Théorème spectral

(Chapitres 7.13 et 8.7 d'Algèbre linéaire de Joseph Grifone)

1. Lemme : Soit $f \in S(E_r)$, alors les valeurs propres de $f$ sont réelles

2. Lemme : Soit $f \in S(E_r)$ et $F$ sous-espace de $E_r$ stable par $f$, alors $F^\perp$ stable par $f$
3. Proposition : Soit $f \in S(E_r)$, alors les sous-espaces propres de $f$ sont deux à deux orthogonaux
4. Théorème spectral (réel) : Soit $f \in S(E_r)$, alors $f$ est orthdiagonalisable, ie il existe une base orthonormée de $E$ composée de vecteurs propres de $E_r$
5. Corollaire : Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$, alors il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ tel que $S = Pdiag(\lambda_1, ..., \lambda_n)^t P$
6. Remarque : Ce théorème n'est pas vrai pour les matrices symétriques complexes
7. Exemple : Soit $S = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tels que $\beta^2 + 4\alpha^2 = 0$, alors $\chi_S = X^2 - \beta X - \alpha^2$ admet une racine double, donc si $S$ est diagonalisable alors $S = \frac{\beta}{2} I_2$ ce qui n'est pas
8. Théorème : Soit $f \in H(E_c)$, alors $Sp(f) \subset \mathbb{R}$, $f$ est diagonalisable et les sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux, donc $f$ est orthodiagonalisable
9. Corollaire : Soit $A \in H_n(\mathbb{C})$, alors il existe $P \in U_n(\mathbb{C})$ tel que $A = Pdiag(\lambda_1, ..., \lambda_n)^t \overline{P}$

## 2.3 Décomposition polaire

(Chapitres 22.9.4 d'Algèbre et géométrie de Jean-Etienne Rombaldi et Exercice 2.28 de Oraux X-ENS Algèbre 3)

1. Définition : Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$, alors on dit que $S$ est positive (respectivement définie positive) si $\forall x \in \mathbb{R}^n, \langle Ax, x\rangle \geq 0$ (respectivement $\forall x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}, \langle Ax, x\rangle > 0$)
2. Exemple : Si $\varphi$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ alors $(\varphi(e_i, e_j))_{1 \leq i,j \leq n}$ est symétrique définie positive
3. Théorème : Soit $A \in S_n^+(\mathbb{R})$, alors il existe $B \in S_n^+(\mathbb{R})$ unique tel que $A = B^2$, de plus $B$ est un polynôme en $A$
4. Théorème de décomposition polaire : Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$, alors il existe un unique couple $(O, S) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $A = OS$
5. Exemple : Si $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ alors $A = OS$ avec $O = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$
6. Corollaire : $A \in GL_n(\mathbb{R}) \longmapsto (O, S) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$ réalise un homéomorphisme
7. Théorème : L'exponentielle $exp : S_n(\mathbb{R}) \longrightarrow S_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme
8. Corollaire : $GL_n(\mathbb{R}) \simeq O_n(\mathbb{R}) \times S_n(\mathbb{R}) \simeq O_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$
9. Application : Les points extrémaux de $B := \{u \in L(E), \|u\| \leq 1\}$, ie les $u \in B$ tels que $B \backslash \{0\}$ soit convexe, sont exactement les éléments de $O(E)$

# 3 Analyse matricielle

## 3.1 Décompositions $LU$ et de Cholesky

(Chapitre 5.7 d'Analyse matricielle de Jean-Etienne Rombaldi)
On considère $(A, b) \in M_n(\mathbb{K}) \times \mathbb{K}^n$.

1. Définition : Les sous-matrices principales de $A$ sont les $A_k = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq k}$ et les déterminants principaux sont les $\Delta_k = det(A_k)$
2. Lemme : Si $a_{11} \neq 0$ alors il existe des matrices de transvection $P_1, ..., P_r$ telles que $P_r ... P_1 A = \begin{pmatrix} a_{11} & * \\ (0) & A' \end{pmatrix}$
3. Théorème : Si $A \in GL_n(\mathbb{K})$ alors $A$ peut être de réduite à la forme triangulaire supérieur en la multipliant par des matrices de transvection ou de dilatation de la forme $D_i(-1)$
4. Théorème : Décomposition $LU$ : Si $A \in GL_n(\mathbb{K})$ alors il existe $L$ triangulaire inférieure de diagonale unité et $R$ triangulaire supérieure telles que $A = LU$ si et seulement si tous les déterminants principaux de $A$ sont non nuls
5. Remarque : Dans ce cas, une telle décomposition est unique et les coefficients diagonaux de $R$ sont donnés par $r_{11} = a_{11}$ et $r_{kk} = \frac{det(A_k)}{det(A_{k-1})}$
6. Application : Si $A \in GL_n(\mathbb{K})$ alors résoudre $Ax = b$ équivaut à résoudre $Ly = b, Rx = y$ avec $A = LU$ la décomposition précédente
7. Corollaire : Décomposition de Cholesky : Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ alors $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ si et seulement s'il existe $B$ triangulaire inférieure et inversible telle que $A = B^t B$
8. Remarque : De plus une telle décomposition est unique si on impose la positivité des coefficients diagonaux de $B$, et $b_{ij} = \frac{1}{b_{jj}} \left( a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} b_{ik} b_{jk} \right)$ et $b_{ii}^2 = a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} b_{ik}^2$
9. Remarque : Le nombre d'opérations est en $O(n^3)$
10. Application : La résolution de $Ax = b$ se ramène à la résolution de deux systèmes triangulaires, et $det(A) = \prod_{i=1}^{n} b_{ii}^2$

## 3.2 Minimisation de fonctionnelle quadratique

(Chapitre 5.15 d'Analyse matricielle de Jean-Etienne Rombaldi, Exercice 1.21 des Oraux X-ENS Analyse 4)

On considère $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$.

1. Théorème : Soit $U$ ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiable en $x_0 \in U$ tel que $\varphi$ admette un extremum local en $x_0$, alors $d\varphi(x_0) = 0$
2. Définition : La fonctionnelle quadratique associée à $A$ et $b$ est $\varphi(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle$
3. Lemme : La fonctionnelle quadratique $\varphi$ est différentiable sur $\mathbb{R}^n$ et $\nabla\varphi(x) = Ax - b$
4. Théorème : La solution de $Ax = b$ réalise le minimum global de la fonctionnelle $\varphi$
5. Lemme : Soit $0 < \lambda_1 \leq ... \lambda_n$ les valeurs propres de $A$, alors $\forall x \in \mathbb{R}^n, \langle Ax, x\rangle \geq \lambda_1 \|x\|_2^2$
6. Théorème : S'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall k \in \mathbb{N}, \langle r_k, \delta_k\rangle \geq \alpha \|r_k\|_2$ alors la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers la solution de $Ax = b$
7. Théorème : Méthode de gradient à pas optimal : Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $x_0 \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = x_n - \rho_n \nabla f(x_n)$ avec $\forall n \in \mathbb{N}, \rho_n = \underset{\rho \in \mathbb{R}_+^*}{argmin}(f(x_n - \rho\nabla f(x_n)))$, alors $x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} x_*$ avec $x_* \in \mathbb{R}^p$ unique minimum global de $f$

# 4 Calcul différentiel et probabilités

## 4.1 Utilisation pour étudier une application deux fois différentiables

(Chapitre 6 du Petit guide de calcul de différentiel de François Rouvière)
On considère $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

1. Proposition : Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiable, alors sa différentielle ou plutôt son gradient définit une application $\nabla f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$
2. Définition : On dit que $f$ est deux fois différentiables si $\nabla f$ est différentiable, dans ce cas on note $d^2 f = d(df)$ et $H_f = J_{\nabla f}$, ie $H_f = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{1 \leq i,j \leq n}$
3. Remarque : Dans ce cas, pour $a \in U$, $h \longmapsto \langle \nabla f(a), h \rangle$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$ et $(h,k) \longmapsto^t hH_f(a)k$ une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^n$
4. Théorème de Schwartz : Dans ce cas, $H_f(a)$ est une matrice symétrique
5. Théorème : Formule de Taylor avec reste intégral : Dans ce cas, si $[a, a+h] \subset U$ alors $f(a+h) = f(a) + df(a)(h) + \int_0^1 (1-t) d^2 f(a+th)(h,h)dt = f(a) + \langle \nabla f(a), h \rangle + \int_0^1 (1-t)^t hH_f(a+th)hdt$
6. Lemme : Soit $A_0 \in S_n(\mathbb{R}) \cap GL_n(\mathbb{R})$ et $\varphi : \begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & S_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & {}^t M A_0 M \end{array}$, alors $d\varphi(I_n) : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow S_n(\mathbb{R})$ est surjective et il existe un voisinage $V$ de $A_0$ dans $S_n(\mathbb{R})$ et $\chi : V \longrightarrow GL_n(\mathbb{R})$ de classe $C^1$ tels que $\forall A \in V, A = \varphi(\chi(A)) = {}^t\chi(A) A_0 \chi(A) = {}^t M A_0 M$
7. Théorème de Morse : Si $0 \in U$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^2$ tel que 0 soit un point critique quadratique non dégénéré de $f$ (ie $df(0) = 0$ et la matrice symétrique $H_f(0)$ est non dégénérée de signature $(p, n-p)$), alors il existe $V, W$ voisinages de 0 et un $C^1$-difféomorphisme $\varphi : V \longrightarrow W$ tel que $\varphi(0) = 0 \textit{ et } \forall x \in V, \quad f(x) - f(0) = \varphi(x)_1^2 + ... + \varphi(x)_p^2 - \varphi(x)_{p+1}^2 - ... - \varphi(x)_n^2$

## 4.2 Matrice de covariance et vecteurs gaussiens

(Chapitre IV.4 de Probabilité de Barbe et Ledoux)

1. Définition : Soit $X$ un vecteur aléatoire, alors on dit que $X$ est gaussien si pour tout $a \in \mathbb{R}^d, \langle \alpha, X \rangle$ suit une loi normale
2. Proposition : Soit $X$ vecteur gaussien, alors la loi de $X$ est entièrement caractérisée par son vecteur moyen $m$ et sa matrice de covariance $\Gamma$
3. Théorème : Dans ce cas $\Gamma \in S_d^+(\mathbb{R})$, donc il existe $A \in M_n(\mathbb{R})$ tel que $\Gamma = A^t A$
4. Proposition : Soit $X$ vecteur gaussien centré de matrice de covariance $\Gamma = A^t A$, alors $X$ a même loi que $AY$ avec $Y$ vecteur gaussien centré de matrice de covarience $I_d$
5. Théorème : Soit $X$ vecteur gaussien de matrice de covariance $\Gamma$ diagonale alors la famille $(X_1, ..., X_d)$