Leçon 159 Formes linéaires et dualité en dimension finie, exemples et applications

Dorian Cacitti-Holland

2020-2021

Références.

1. Algèbre et géométrie de Jean-Etienne Rombaldi
2. Algèbre linéaire de Joseph Grifone
3. Histoires hédonistes de groupes et de gréométries tome 1 de Caldero et Germoni
4. Algèbre d'Aviva Szpirglas
5. Calcul différentiel de Mohammed El Amrani

Développements.

1. Formes de Hankel
2. Réduction de Jordan
3. Enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$

Table des matières

1 Formes linéaires

1.1 Espaces dual et bidual

(Cahpitres 14.1 et 14.2 d'Algèbre et géométrie de Jean-Etienne Rombaldi et 3.9 d'Algèbre linéaire de Joseph Grifone)

On conisdère E un K-espace vectoriel de dimension finie n.

1. Définition : Soit $\varphi : E \longrightarrow K$, alors on dit que φ est une forme linéaire si φ est linéaire, on note E^* leur ensemble
2. Exemple : Les projections relatives à une base sont des formes linéaires
3. Proposition : E^* est un espace vectoriel
4. Théorème : Soit $\varphi \in E^*$ non nulle, alors $ker(\varphi)$ est un hyperplan, réciproquement tout hyperplan est noyau d'une forme linéaire non nulle
5. Théorème : Toute forme linéaire $\varphi \in E^*$ est de la forme $\varphi(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i$ avec $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ base de E
6. Lemme : Soit E, F, G trois espaces vectoriels, $u \in L(E,F), v \in L(E,G)$, alors $ker(u) \subset ker(v)$ si et seulement s'il existe $w \in L(F,G)$ tel que $v = w \circ u$
7. Théorème : Soit $\varphi_1, ..., \varphi_p, \varphi \in E^*$ telles que $\bigcap\limits_{i=1}^{p} ker(\varphi_i) \subset ker(\varphi)$, alors φ est combinaison linéaire des φ_i
8. Application : Théorème des extrema liés
9. Définition : On note E^{**} le dual de E^* qu'on appelle le bidual de E
10. Théorème : E et E^{**} sont isomorphes de façon canonique

1.2 Bases duale et antéduale

(Chapitre 14.1 d'Algèbre et géométrie de Jean-Etienne Rombaldi, Exercices 3.34 d'Algèbre linéaire de Joseph Grifone et 5.D.26 de Histoires hédonistes de groupes et de géométries tome 1 de Caldero et Germoni)

1. Théorème : Soit $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ base de E, alors $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$ définit une base de E^* appelée base duale de φ
2. Exemple : Soit $e_i = X^i$ dans $K_n[X]$, alors la base duale des X^i est $e_i^*(P) = \frac{P^{(i)}(0)}{i!}$
3. Remarque : Le théorème n'est plus valable en dimension infinie
4. Exemple : Dans $K[X]$, $e_i = X^i$ définit une base mais la famille duale n'en est pas une de $(K[X])^*$
5. Corollaire : $dim(E) = dim(E^*)$
6. Théorème : Soit b' une base de E^*, alors il existe une base b de E, appelée base antéduale de b^*, tel que b^* soit la base duale de b

7. Exemple : Soit $\varphi_1(x) = x_1 + 2x_2 + x_3, \varphi_2(x) = 3x_1 + 3x_2 + 3x_3, \varphi_3(x) = 3x_1 + 7x_2 + x_3$, alors la base antéduale est $e_1 = \begin{pmatrix} -18 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$
8. Proposition : Soit $x_1, ..., x_t \in \mathbb{C}$ distincts et $\varphi_k : y \longmapsto y_0 + x_k y_1 + ... + x_k^{n-1} y_{n-1} \in (\mathbb{C}^n)^*$, alors, dans la base dual canonique $(e_k^*)_{0 \leq k \leq n-1}$, $\varphi_k = e_0^* + x_k + e_1^* + ... + x_{n-1} e_{n-1}^*$ et les φ_i forment une famille libre
9. Application : Formes de Hankel : Si $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré n et de racines complexes distinctes $x_1, ..., x_t$ $(t \leq n)$ de multiplicités respectives $m_1, ..., m_t$ et $s_k = m_1 x_1^k + ... m_t x_t^k$, alors $\sigma_{\mathbb{R}} := \sum\limits_{0 \leq i,j \leq n-1} s_{i+j} x_i x_j$ est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$, de plus si on note $(p, q) = sign(\sigma_{\mathbb{R}})$ alors le nombre de racines de P est $t = p + q$ et et le nombre de racines réelles

2 Orthogonalité et transposition

2.1 Orthogonalité en dualité

(Chapitres 14.2, 14.3 et 14.4 d'Algèbre et géométrie de Jean-Etienne Rombaldi)

1. Définition : Soit $x \in E, \varphi \in E^*$, alors on dit que x et φ sont orthogonaux si $\varphi(x)$
2. Remarque : Si E est euclidien alors on retrouve la notion classique car toute $\varphi \in E^*$ s'écrit $\varphi(x) = \langle a, x \rangle$
3. Définition : Soit $X \subset E$, alors $X^\perp = \{\varphi \in E^*, \forall x \in X, \varphi(x) = 0\rangle$
4. Exemple : $\{0\}^\perp = E^*, E^\perp = \{0\}$
5. Définition : Soit $Y \subset E^*$, alors ${}^\perp Y = \{x \in E, \forall \varphi \in Y, \varphi(x)\}$
6. Exemple : ${}^\perp\{0\} = E$, ${}^\perp(E^*) = \{0\}$
7. Théorème : Soit $A, B \subset E, U, V \subset E^*$, alors
   — $A \subset B \Rightarrow B^\perp \subset A^\perp$, $U \subset V \Rightarrow {}^\perp V \subset {}^\perp U$
   — $A \subset {}^\perp(A^\perp)$, en général stricte, $U \subset ({}^\perp U)^\perp$, en général stricte
   — $A^\perp = (Vect(A))^\perp$, ${}^\perp U = {}^\perp(Vect(U))$
8. Théorème : Soit F sous-espace de E, G sous-espace de E^*, alors :
   — $dim(F) + dim(F^\perp) = dim(E) = dim(G) + dim({}^\perp G)$
   — $F = {}^\perp(F^\perp), G = ({}^\perp G)^\perp$
9. Remarque : En dimension infinie on a que ${}^\perp(F^\perp) \subset F$
10. Proposition : Soit F_1, F_2 sous-espaces de E, G_1, G_2 sous-espaces de E^*, alors :
    — $(F_1 + F_2)^\perp = F_1^\perp \cap F_2^\perp, (F_1 \cap F_2)^\perp F_1^\perp F_2^\perp$
    — ${}^\perp(G_1 + G_2) = {}^\perp G_1 \cap {}^\perp G_2$, ${}^\perp(G_1 \cap G_2) = {}^\perp G_1 + {}^\perp G_2$
11. Corollaire : Soit $\varphi_1, ..., \varphi_p \in E^*$ famille de rang r, alors $F = \bigcap\limits_{i=1}^{p} ker(\varphi_i)$ est de dimension $n - r$, réciproquement tout espace de dimension m s'écrit comme intersection de $n - m$ noyaux de formes linéaires indépendantes
12. Application : Tout hyperplan est le noyau d'une forme linéaire non nulle
13. Exemple : Soit $H = \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ hyperplan de $\mathbb{R}^n$, alors $H = ker(\varphi)$ avec $\varphi(x) = \langle e_n, x \rangle$

2.2 Tansposée d'une application linéaire

(Chapitre 14.5 d'Algèbre et géométrie de Jean-Etienne Rombaldi)
On considère E, F deux espaces vectoriels.

1. Définition : Soit $u \in L(E,F)$, alors ${}^t u : \varphi \in F^* \longmapsto \varphi \circ u$ est appelé transposée de u
2. Proposition : Dans ce cas ${}^t u \in L(F^*, E^*)$
3. Théorème : L'application transposition est linéaire et injective de $L(E,F)$ dans $L(F^*, E^*)$
4. Corollaire : $L(E,F)$ et $L(F^*, E^*)$ sont isomorphes de même dimension
5. Théorème : Soit $u \in L(E,F), v \in L(F,G)$ avec G un espace vectoriel, alors :
   — ${}^t(v \circ u) = {}^t u \circ {}^t v$
   — Si $F = E$ alors ${}^t id_E = id_{E^*}$
   — Si u est un isomorphisme alors ${}^t u$ également et $({}^t u)^{-1} = {}^t(u^{-1})$
   — $ker({}^t u) = Im(u)^t, Im({}^t u) = ker(u)^{\perp}, rg(u) = rg({}^t u)$
   — u est surjective (respectivement injective) si et seulement si ${}^t u$ est injective (respectivement surjective)
6. Théorème : Soit $u \in L(E,F)$ et A sa matrice dans les bases b, b', alors la matrice de ${}^t u$ dans les bases b'^* et b^* est ${}^t A$
7. Proposition : Soit $u \in End(E)$ et H sous-espace de E^* stable par ${}^t u$, alors ${}^{\perp}H$ est stable par u

3 Applications à la réduction

3.1 Réduction de Jordan

(Chapitres 21.3 et 21.4 d'Algèbre et géométrie de Jean-Etienne Rombaldi et 6.14 d'Algèbre linéaire de Joseph Grifone)

1. Définition : Soit $u \in L(E)$, alors on dit que u est nilpotent s'il existe $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^q = 0$ et $u^{q-1} \neq 0$, dans ce cas q est l'indice de nilpotence de q
2. Lemme : Soit $u \in L(E)$ nilpotent d'indice q, alors ${}^t u \in L(E^*)$ est nilpotent d'indice q
3. Lemme : Soit $u \in L(E)$ nilpotent d'indice q et $x \in E$ tel que $u^{q-1}(x) \neq 0$, alors la famille $(x, u(x), ..., u^{q-1}(x))$ soit libre et l'espace engendré F soit stable par u
4. Lemme : Soit $u \in L(E)$ nilpotent d'indice q, alors il existe $\varphi \in E^*$ et $x \in E$ tels que $F = Vect(x, u(x), ..., u^{q-1}(x))$ et $G = {}^{\perp}Vect(\varphi, {}^t u(\varphi), ..., ({}^t u)^{q-1}(\varphi))$ soit stables par u et $E = F \oplus G$
5. Proposition : Soit $u \in L(E)$ nilpotent d'indice q, alors il existe une base $b = b_1 \cup ... \cup b_r$ une base de E telle que $E_i = Vect(b_i)$ soit u-stable et $Mat_{b_i}(u_{|E_i}) = J_i \in M_{q_i}(K)$ avec $q_i = dim(E_i)$
6. Théorème : Soit $u \in L(E)$ tel que χ_u soit scindé, alors il existe une base b de E telle que $Mat_b(u)$ soit diagonale par blocs de Jordan
7. Exemple : Soit $A \in M_n(K)$ tel que $\chi_A = (X-\lambda)^5$, $\pi_A = (X-\lambda)^3$ et $dim(E_\lambda(f)) = 2$, alors A est semblable à $diag(J_\lambda(3), J_\lambda(2))$

8. Remarque : L'hypothèse est toujours vérifiée dans un corps algébriquement clos, comme par exemple $\mathbb{C}$
9. Application : Soit $A \in M_n(K)$, alors A et ${}^tA$ sont sembables
10. Applcation : Le calcul d'une exponentielle de matrice devient plus simple

3.2 Invariants de similitude et réduction de Frobenius

(Chapitres B d'Algèbre de Xavier Gourdon et XI.1 et XI.2 d'Algèbre linéaire de Mansuy et Mneimné)

1. Définition : Soit $x \in E$, alors on note $\pi_{u,x}$ le polynôme unitaire engendrant l'idéal $\{P \in K[X], P(u)(x) = 0\}$, et $E_x := \{P(u)(x), P \in K[x]$
2. Proposition : Il existe $x \in E$ tel que $\pi_{u,x} = \pi_u$
3. Définition : On dit que u est cyclique s'il existe $x \in E$ tel que $E_{u,x} = E$
4. Remarque : u est cyclique si et seulement si $deg(\pi_u) = n$ si et seulement si $\pi_u = \chi_u$
5. Proposition : Si u cyclique alors il existe une base b de E tel que $Mat_b(u) = C(\pi_u)$ avec $C(\pi_u)$ matrice compagnon associée au polynôme π_u
6. Théorème : Il existe $F_1, ..., F_r$ sous-espaces u-stables tels que :
   — $E = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i$
   — Pour tout $i \in [\![1, r,]\!], u_i = u_{|F_i}$ est cyclique
   — Pour tout $i \in [\![1, r]\!], \pi_{i+1} \mid \pi_i$
7. Remarque : $\pi_1, ..., \pi_r$ ne dépendent que de u et non du choix de la décomposition
8. Définition : Les $\pi_1, ..., \pi_r$ sont appelés les invariants de similtudes de u
9. Théorème de réduction de Frobenius : Il existe une base b de E tel que $Mat_b(u) = \begin{pmatrix} C(\pi_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & C(\pi_r) \end{pmatrix}$
10. Remarque : $\pi_1 = \pi_u$ et $\pi_1 ... \pi_r = \chi_u$
11. Exemple : Soit $A = diag(C_{X^2}, C_{X^2+1})$, alors les invariants de similitude de A sont réduits à $X^2(X^2+1)$
12. Corollaire : u et v sont semblables si et seulement s'ils ont les mêmes invariants de similitude
13. Application : A partir de la réduction de Frobenius on peut retrouver la réduction de Jordan d'un endomorphisme nilpotent
14. Exemple : Soit $A \in M_8(\mathbb{R})$ dont les invariants de similitude sont $X^2(X-2)^3, X(X-2), X$ alors la réduite de Jordan de A est $diag(J_0(2), J_2(3), J_0(1), J_2(1), J_0(1))$

4 Exemples d'espaces duaux et de formes linéaires

4.1 Espace dual de $M_n(K)$

(Exercice 14.6.4 d'Algèbre et géométrie de Jean-Etienne Rombaldi et Chapitre 7.IV.2 d'Algèbre d'Aviva Szpirglas)

1. Proposition : tr est une forme linéaire sur $M_n(K)$ telle que $tr(AB) = tr(BA)$
2. Lemme : Soit $\varphi \in (M_n(K))'$ telle que $\varphi(AB) = \varphi(BA)$, alors $\varphi(E_{ij}) = 0$ pour $i \neq j$
3. Théorème : Dans ce cas, $\varphi(A) = \lambda tr(A)$
4. Application : Soit $u \in L(M_n(K))$ tel que $u(I_n) = I_n$ et $u(AB) = u(BA)$, alors u conserve la trace, ie $tr(u(A)) = tr(A)$
5. Théorème : $(M_n(K))' = \{B \longmapsto tr(AB), A \in M_n(K)\}$
6. Lemme : Soit C un convexe fermé non vide de $M_n(\mathbb{R})$ et $M \in MM_n(\mathbb{R})$ tels que $\forall \varphi \in (M_n(\mathbb{R}))', \varphi(M) \leq \underset{N \in C}{sup}(\varphi(N))$, alors $M \in C$
7. Théorème : L'enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$ est $\overline{B}_2(0,1)$

4.2 Applications différentiables

(Chapitres 3.1, 3.4 et 6.3 de Calcul différentiable de Mohammed El Amrani)
On consoidère U un ouvert de $\mathbb{R}^n$

1. Définition : Soit $f : U \longrightarrow R^m$, alors on dit que f est différentiable en $a \in U$ s'il existe $L \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ tel que $f(a+h) \underset{h \to 0}{=} f(a) + L(h) + o(\|h\|)$, et différentiable sur U si différentiable en tout point de U
2. Remarque : Dans ce cas note $L = df(a)$
3. Théorème de réprésentation de Riesz : L'application $x \in \mathbb{R}^n \longmapsto (y \longmapsto \langle x, y \rangle) \in (\mathbb{R}^n)^*$ est un isomorphisme, en particulier $\forall \varphi \in E^*, \exists! y \in E, \varphi = \langle \cdot, y \rangle$
4. Corollaire : Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiable en $a \in U$, alors il existe une unique $\nabla f(a) \in \mathbb{R}^n$ tel que $df(a) = \langle \nabla f(a), \cdot \rangle$
5. Définition : Dans ce cas $\nabla f(a)$ est appelé gradient de f en a
6. Proposition : Dans ce cas $\nabla f(a) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) e_k$
7. Exemple : Soit $f(x,y,z) = x^3 - 2xy - z^3$, alors $\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3x^2 - 2y \\ -2x \\ -3z^2 \end{pmatrix}$
8. Théorème des extrema liés : Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : U \longrightarrow \mathbb{R}^p$ de classe C^1, $\Gamma = g^{-1}(\{0\})$ et $a \in \Gamma$ tel que $f_{|\Gamma}$ admette un extremum local en a et $dg(a)$ soit surjective, alors il existe $\lambda_1, ..., \lambda_p \in \mathbb{R}$, appelés multiplicateurs de Lagrange, tels que $\nabla \left(f + \sum\limits_{i=1}^{p} \lambda_i g_i \right) = 0$
9. Exemple : Soit $f(x,y,z) = x + z$ et $g(x,y,z) = (x^2 + y^2 + z^2 - 1, z - y)$, alors $f_{|\Gamma}$ admet un minimum et maximum dans Γ