Leçon 160 Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (en dimension finie)

Dorian Cacitti-Holland

2020-2021

Références.

1. Algèbre et géométrie de Jean-Etienne Rombaldi
2. Histoires hédonistes de groupes et géométrie tome 1 de Caldero et Germoni
3. Cours d'algèbre de Daniel Perrin
4. Algèbre linéaire de Joseph Grifone
5. Oraux X-ENS Algèbre 3
6. Algèbre d'Aviva Szpirglas

Développements.

1. Réduction dans $O_n(\mathbb{R})$
2. Enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$

Table des matières

1 Conséquence du caractère euclidien de l'espace **2**
1.1 Adjoint d'un endomorphisme . . . 2
1.2 Propriétés de l'adjoint . . . 2

2 Endormorphismes orthogonaux **2**
2.1 Définitions et propriétés . . . 2
2.2 Réduction dans $O(E)$ . . . 3
2.3 Propriétés du sous-groupe $O(E)$ de $GL(E)$ . . . 3

3 Projections et symétries orthogonales **3**
3.1 Définitions et propriétés . . . 3
3.2 Générateurs et centres de $O(E)$ et $SO(E)$ . . . 4
3.3 Méthode des moindres carrés . . . 4

4 Les endomorphismes symétriques **5**
4.1 Définitions et propriétés . . . 5
4.2 Orthodiagonalisation dans $S(E)$ . . . 5
4.3 Décomposition polaire et homéomorphismes . . . 6

1 Conséquence du caractère euclidien de l'espace

1.1 Adjoint d'un endomorphisme

(Chapitre 22.2 d'Algèbre et géométrie de Jean-Etienne Rombaldi)

On considère E un espace vectoriel euclidien, ie un espace vectoriel réel de dimension finie muni d'un produit scalaire.

1. Lemme : Soit l forme linéaire sur E, alors il existe un unique vecteur $a \in E$ tel que $f(x) = \langle x, a \rangle$
2. Exemple : Soit $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ base orthogonale de E et $l(x) = x_i$ avec x_i la coordonnée de x dans cette base, alors $l(x) = \langle x, e_i \rangle$
3. Théorème : Soit $u \in End(E)$, alors il existe un unique $u^* \in End(E)$ tel que $\langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle$
4. Définition : Soit $u \in End(E)$, alors u^* du théorème précédent est appelé adjoint de u
5. Exemple : Si $u(x) = \lambda x$ alors $u^*(y) = \lambda y$

1.2 Propriétés de l'adjoint

(Chapitre 22.2 d'Algèbre et géométrie de Jean-Etienne Rombaldi)

1. Théorème : Soit $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de $E, G = (\langle e_i, e_j \rangle)_{1 \leq i,j \leq n}$ la matrice de Gram associéé et $u \in End(E)$ de matrice A dans la base e, alors la matrice de u^* dans la base e est $G^{-1}\ {}^tAG$
2. Corollaire : Dans ce cas, si e est orthonormale alors la matrice de u^* dans la base e est ${}^tA$
3. Corollaire : Soit $u \in End(E)$, alors $det(u) = det(u^*)$
4. Proposition : Soit $\lambda \in \mathbb{R}, u, v \in End(E)$, alors $(\lambda u + v)^* = \lambda u^* + v^*, (u^*)^* = u, (u \circ v)^* = v^* \circ u^*$
5. Corollaire : Soit $u \in GL(E)$, alors $u^* \in GL(E)$ et $(u^*)^{-1} = (u^{-1})^*$
6. Proposition : Soit $u \in End(E)$, alors $ker(u^*) = Im(u)^\perp, Im(u^*) = ker(u)^\perp$
7. Corollaire : Soit $u \in End(E)$, alors $rg(u^*) = rg(u)$
8. Théorème : Soit $u \in End(E)$ et F sous-espace vectoriel de E stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u^*

2 Endormorphismes orthogonaux

2.1 Définitions et propriétés

(Chapitres 22.3 d'Algèbre et géométrie de Jean-Etienne Rombaldi)

1. Définition : Soit $u \in End(E)$, alors on dit que u est orthogonal si $\langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$, et on note $O(E)$ leur ensemble
2. Exemple : Les seules homothéties dans $O(E)$ sont id_E et $-id_E$

3. Théorème : Soit $u \in End(E)$, alors $u \in O(E)$ si et seulement si $\|u(x)\| = \|x\|$
4. Corollaire : Soit $u \in O(E)$, alors $u \in GL(E)$ et $u^* = u^{-1}$
5. Théorème : Soit $u \in End(E)$, alors $u \in O(E)$ si et seulement si u envoie toute base orthonormale de E sur une base orthonormale de E
6. Exemple : Si $dim(E) = 2$, soit $u \in End(E)$ rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$, alors $u \in O(E)$
7. Théorème : Soit $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ base orthonormée de E et $u \in End(E)$ tel que $Mat_e(u) = A$, alors $u \in O(E)$ si et seulement si $A^t A = {}^t AA = I_n$
8. Corollaire : Soit $u \in End(E)$, alors $det(u) \in \{-1, 1\}$

2.2 Réduction dans $O(E)$

(Chapitres 22.4 d'Algèbre et géométrie de Jean-Etienne Rombaldi)

1. Lemme : Soit $u \in O(E)$, alors $Sp(u) \subset \{-1, 1\}$
2. Lemme : Soit $u \in O(E)$, alors il existe des sous-espaces vectoriels $F_1, ..., F_r$ de E deux à deux orthogonaux de dimension 1 ou 2 et stables par u tels que $E = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i$
3. Proposition : Soit $u \in O(E)$ et F sous-espace vectoriel de E stable par F, alors $F^\perp$ est stable par u
4. Théorème de réduction des endomorphismes orthogonaux : Soit $u \in O(E)$, alors il existe une base orthonormée e de E telle que $Mat_e(u) = diag(I_p, I_q, R_1, ..., R_r)$ avec $p, q \in [\![1, n]\!], R_i = R(\theta_i), \theta_i \in \,]0, 2\pi[\, \setminus \{\pi\}$

2.3 Propriétés du sous-groupe $O(E)$ de $GL(E)$

(Chapitres 22.3 d'Algèbre et géométrie de Jean-Etienne Rombaldi et II.3 et II.4 de Histoires hédonistes de groupes et de géométries tome 1 de Caldero et Germoni)

1. Théorème : $O(E)$ est un sous-groupe de $GL(E)$
2. Théorème : $O(E)$ est un compact de $End(E)$
3. Définition : $SO(E) := O(E) \cap SL(E)$
4. Exemple : $SO(\mathbb{R}) = O(\mathbb{R}) \cap GL(\mathbb{R}) = \{id_{\mathbb{R}}\}$
5. Proposition : $SO(E)$ est connexe
6. Corollaire : Les composantes connexes de $O(E)$ sont $SO(E)$ et $O^-(E) := O(E) \cap det^{-1}(\{-1\})$
7. Application : $SO_3(\mathbb{R})$ est un groupe simple

3 Projections et symétries orthogonales

3.1 Définitions et propriétés

(Chapitres 22.1 d'Algèbre et géométrie de Jean-Etienne Rombaldi et V.4 du Cours d'alagèbre de Daniel Perrin)

1. Théorème de projection orthogonale : Soit C sous-espace vectoriel de E et $x \in G$, alors il existe un unique $p_C(x) \in C$ tel que $d(x,C) = \|x - p_C(x)\|$, de plus on a la caractérisation $y = p_C(x)$ si et seulement si $y \in C, x - y \in C^\perp$
2. Définition : Dans ce cas, $p_C : E \longrightarrow C$ est appelé la projection orthogonale de E sur C
3. Corollaire : Dans ce cas, si $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base de C, alors $p_C(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i$
4. Exemple : La projection orthogonale de $\mathbb{R}^n$ sur $Vect(e_1)$ est donnée par $p_1(x) = \langle x, e_1 \rangle e_1$
5. Définition : Soit F sous-espace vectoriel de E, alors la symétrie orthogonale par rapport à F est $s_F(x) = p_F(x) - p_{F^\perp}(x)$
6. Exemple : La symétrie orthogonale de $\mathbb{R}^n$ par rapport à $Vect(e_1)$ est donnée par $s_1(x) = \langle x, e_1 \rangle e_1 - \sum\limits_{i=2}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i$
7. Définition : Soit F sous-espace vectoriel de E, alors on dit que s_F est une réflexion si $dim(F^\perp) = 1$, un retournement si $dim(F^\perp) = n-1$ et un renversement si $dim(F^\perp) = 2$
8. Exemple : Si $F = \mathbb{R}a$ alors $s_F(x) = 2\frac{\langle x,a \rangle}{\|a\|^2}a - x$ et si $F = (\mathbb{R}a)^\perp$ alors $s_F(x) = x - 2\frac{\langle x,a \rangle}{\|a\|^2}a$
9. Théorème : Soit F sous-espace vectoriel de E, alors s_F est une isométrie involutive auto-adjointe

3.2 Générateurs et centres de $O(E)$ et $SO(E)$

(Chapitres 22.5 d'Algèbre et géométrie de Jean-Etienne Rombaldi et VI.2 du Cours d'Algèbre de Daniel Perrin)

On suppose $dim(E) = n \geq 3$.

1. Théorème : $O(E)$ est engendré par les réflexions, plus précisément si $u \in O(E)$ alors u est produit d'au plus n réflexions
2. Lemme : Soit τ_1, τ_2 deux réflexions de E, alors il existe σ_1, σ_2 deux renversements tels que $\tau_1 \circ \tau_2 = \sigma_1 \circ \sigma_2$
3. Corollaire : $SO(E) = O(E) \cap SL(E)$ est engendré par les renversements, plus précisément si $u \in SO(E)$ alors u est produit d'au plus n renversements
4. Théorème : Le centre de $O(E)$ est $Z(O(E)) = \{id_E, -id_E\}$
5. Corollaire : $O(E)$ n'est pas un groupe abélien
6. Corollaire $Z(SO(E)) = \{id_E\}$ si n impair et $Z(SO(E)) = \{id_E, -id_E\}$ si n pair

3.3 Méthode des moindres carrés

(Exercice 7.23 d'Algèbre linéaire de Joseph Grifone)

On considère E et F deux espaces euclidiens et $f \in L(E,F)$.

1. Lemme : Si $q = dim(E) \leq dim(F) = n$ et f injective alors $det(f^* \circ f) \neq 0$
2. Proposition : Soit $p : F \longrightarrow F$ la projection orthogonale sur $Im(f)$, alors $p = f \circ (f^* \circ f)^{-1}$

3. Définition : $f^- := (f^* \circ f)^{-1} \circ f^*$ est appelé l'inverse généralisé de f
4. Exemple : $A := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^- = \frac{1}{50}\begin{pmatrix} 18 & 15 & -1 \\ 2 & -10 & 14 \end{pmatrix}$
5. Remarque : $f^- \circ f = id_E, f \circ f^- = p$ et si f bijective alors $f^- = f^{-1}$
6. Définition : Soit $b \in F$, si f injective alors on appelle solution des moindres carrés de $f(x) = b$ le vecteur $x_0 \in E$ tel que $\|f(x_0) - b\| = \underset{x \in E}{inf} \|f(x) - b\|$
7. Théorème : La solution des moindres carrés de $f(x) = b$ est donnée par $x_0 = f^-(b)$
8. Exemple : La solution des moindres carrés de $Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ a \end{pmatrix}$ est $x_0 = \frac{1}{50}\begin{pmatrix} 48 - a \\ -22 + 14a \end{pmatrix}$

4 Les endomorphismes symétriques

4.1 Définitions et propriétés

(Chapitres 22.6 d'Algèbre et géométrie de Jean-Etienne Rombaldi)

1. Définition : Soit $u \in End(E)$, alors on dit que u est symétrique si $\langle u(x), y \rangle x, u(x) \rangle$, ie $u^* = u$, et on note $S(E)$ leur ensemble
2. Exemple : Les dilatations sont des endomorphismes symétriques
3. Théorème : Soit $u \in End(E)$, alors $u \in S(E)$ si et seulement si sa matrice dans toute base orthonormale de E est symétrique
4. Corollaire : $dim(S(E)) = \frac{n(n+1)}{2}$

4.2 Orthodiagonalisation dans $S(E)$

(Chapitres 22.7 et 22.9.2 d'Algèbre et géométrie de Jean-Etienne Rombaldi)

1. Lemme : Soit $u \in S(E)$, alors $Sp(u) \subset \mathbb{R}$
2. Lemme : Soit $u \in S(E)$ et $\lambda, \mu \in Sp(u)$ distincts, alors $E_\lambda = ker(u - \lambda id_E)$ et $E_\mu = ker(u - \mu id_E)$ sont orthogonaux
3. Théorème spectral : Soit $u \in S(E)$, alors u est diagonalisable dans une base orthonormée de E
4. Corollaire : Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ symétrique, alors il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $D \in M_n(\mathbb{R})$ diagonale tels que $A = PD^tP$
5. Corollaire : Soit $(u_i)_{i \in I} \in S(E)^I$, alors il existe une base orthonormale de diagonalisation commune aux u_i si et seulement si les u_i commutent entre eux deux à deux

4.3 Décomposition polaire et homéomorphismes

(Chapitres 22.9.4 d'Algèbre et géométrie de Jean-Etienne Rombaldi et Exercice 2.28 de Oraux X-ENS Algèbre 3 et chapitre 7.IV.2 d'Algèbre d'Aviva Szpirglas)

1. Définition : Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$, alors on dit que S est positive (respectivement définie positive) si $\forall x \in \mathbb{R}^n, \langle Ax, x\rangle \geq 0$ (respectivement $\forall x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}, \langle Ax, x\rangle > 0$)
2. Exemple : Si φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ alors $(\varphi(e_i, e_j))_{1\leq i,j\leq n}$ est symétrique définie positive
3. Théorème : Soit $A \in S_n^+(\mathbb{R})$, alors il existe $B \in S_n^+(\mathbb{R})$ unique tel que $A = B^2$, de plus B est un polynôme en A
4. Théorème de décomposition polaire : Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$, alors il existe un unique couple $(O, S) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $A = OS$
5. Exemple : Si $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ alors $A = OS$ avec $O = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$
6. Corollaire : $A \in GL_n(\mathbb{R}) \longmapsto (O, S) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$ réalise un homéomorphisme
7. Corollaire : Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, alors il existe $(O, S) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^+(\mathbb{R})$ tel que $A = OS$
8. Application : Les points extrémaux de $B := \{u \in L(E), \|u\| \leq 1\}$, ie les $u \in B$ tels que $B\backslash\{u\}$ soit convexe, sont exactement les éléments de $O(E)$
9. Lemme : L'espace dual de $M_n(\mathbb{R})$ est $(M_n(\mathbb{R}))' = \{tr(A \times id_{M_n(\mathbb{R})}), A \in M_n(\mathbb{R})\}$
10. Lemme : Soit C un convexe fermé non vide de $M_n(\mathbb{R})$ et $M \in M_n(\mathbb{R})$ tel que $\forall \varphi \in (M_n(\mathbb{R}))', \varphi(M) \leq \underset{N\in C}{sup}(\varphi(N))$, alors $M \in C$
11. Théorème : L'enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$ est la boule unité fermé pour la norme $\|\cdot\|_2$, ie $Conv(O_n(\mathbb{R})) = \overline{B}_{\|\cdot\|_2}(0, 1)$