Leçon 161 Distances et isométries d'un espace affine euclidien

Dorian Cacitti-Holland

2020-2021

Références.

1. Géométrie de Patrice Tauvel
2. Algèbre linéaire de Joseph Grifone
3. Algèbre de Xavier Gourdon
4. Algèbre et géométrie de Jean-Etienne Rombaldi
5. Algèbre d'Aviva Szpirglas

Développements.

1. Déterminant de Gram et inégalité de Hadamard
2. Réduction dans $O_n(\mathbb{R})$
3. Enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$
4. Table des caractères de S_4

Table des matières

1 Distance dans un espace affine euclidien

1.1 Entre deux points, un point et une partie, deux parties

(Chapitres 3.2, 3.3 et 3.4 de Géométrie de Patrice Tauvel)
On considère $\mathcal{E}$ un espace affine de direction E.

1. Définition : On dit que $\mathcal{E}$ est un espace affine vectoriel si E est euclidien, ie de dimension finie et muni d'un produit scalaire
2. Définition : Soit $P, Q \in \mathcal{E}$, alors $d(P,Q) := \left\|\overrightarrow{PQ}\right\|$
3. Exemple : Dans $\mathbb{R}^3$, la distance entre $(1,1,1)$ et $(2,2,2)$ est $\sqrt{3}$
4. Proposition : $d : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est une distance sur $\mathcal{E}$
5. Définition : Soit $P \in \mathcal{E}$ et $\mathcal{A}$ un sous-espace de $\mathcal{E}$, alors $d(P,\mathcal{A}) := \underset{Q\in\mathcal{A}}{inf}(d(P,Q))$
6. Exemple : Dans $\mathbb{R}^3$, la distance entre le plan affine d'équation $x = 1$ et $(2,2,2)$ est 1
7. Définition : Soit $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux sous-espaces de $\mathcal{E}$, alors $d(\mathcal{A},\mathcal{B}) := \underset{P\in\mathcal{A}}{inf}(d(P,\mathcal{B})) = \underset{Q\in\mathcal{B}}{inf}(d(Q,\mathcal{A}))$
8. Remarque : Il ne s'agit pas d'une distance sur $\mathcal{P}(\mathcal{E})$
9. Exemple : Si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux droites affines sécantes de $\mathbb{R}^2$ alors $d(\mathcal{A},\mathcal{B}) = 0$ et $A \neq B$

1.2 Lien avec les déterminants et les matrices de Gram

(Chapitres 2.6 et 3.4 de Géométrie de Patrice Tauvel et Exercice 7.19 d'Algèbre linéaire de Joseph Grifone)

1. Définition : Soit $(v_1,...,v_p) \in E^p$, alors $Gram(v_1,...,v_p) = (\langle v_i, v_j\rangle)_{1\leq i,j\leq p}$ est la matrice de Gram des vecteurs $v_1,...,v_p$, et $G(v_1,...,v_p) = det(Gram(v_1,...,v_p))$ leur déterminant de Gram
2. Exemple : Soit $(e_1,...,e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, alors $G(e_1,...,e_n) = 1$
3. Proposition : Dans ce cas, $G(v_1,...,v_p) \neq 0$ si et seulement si $(v_1,...,v_p)$ est libre
4. Théorème : Soit $(v_1,...,v_p)$ une famille libre, $F = Vect(v_1,...,v_p)$ et $x \in E$, alors $d(x,F)^2 = \frac{G(x,v_1,...,v_p)}{G(v_1,...,v_p)}$
5. Application : Inégalité de Hadamard : Soit $(x_1,...,x_n) \in E^n$, alors :
   — $G(x_1,...,x_n) \leq \prod_{i=1}^{n} \|x_i\|^2$
   — Si $E = \mathbb{C}^n$ alors $|det(x_1,...,x_n)| \leq \prod_{i=1}^{n} \|x_i\|$
   On a égalité si et seulement si $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ est orthogonale ou si l'un des vecteurs est nul.
6. Définition : Soit $\mathcal{F}$ sous-espace affine de $\mathcal{E}$, F la direction de $\mathcal{F}$, G le supplémentaire de F dans E, p le projecteur de E sur F parallèlement à G et $M \in \mathcal{E}$, alors $\mathcal{F}\cap(M+G) = \{\pi_{\mathcal{F}}(M)\}$, avec $\pi_{\mathcal{F}}(M)$ le projeté de M sur $\mathcal{F}$ parallèlement à G

7. Théorème : Si $\mathcal{F}$ sous-espace affine de $(\mathcal{E}, E)$ et $A \in \mathcal{E}$ alors :
   — $\pi_{\mathcal{F}}(A)$ est l'unique point $P \in \mathcal{F}$ tel que $AP = \left\|\overrightarrow{AP}\right\| = d(A, \mathcal{F})$
   — Pour tout $P \in \mathcal{F}$ et toute base $(\vec{e_1}, ..., \vec{e_r})$ de F, $d(A, \mathcal{F})^2 = \frac{G(\vec{AP}, \vec{e_1}, ..., \vec{e_r})}{G(\vec{e_1}, ..., \vec{e_r})}$
8. Corollaire : Si $(M, N) \in \mathcal{E}^2$ tel que $\overrightarrow{MN} \in F$ alors $d(M, \mathcal{F}) = d(N, \mathcal{F})$
9. Théorème : Si $(\mathcal{F}, F)$ et $(\mathcal{G}, G)$ sous-espaces de $(\mathcal{E}, E)$ alors :
   — Il existe $(A, B) \in \mathcal{F} \times \mathcal{G}$ tel que $d(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = d(A, B)$ et (A, B) est unique si et seulement si $F \cap G = \{\vec{0}\}$
   — Si $(P, Q) \in \mathcal{F} \times \mathcal{G}$ et $(\vec{e_1}, ..., \vec{e_m})$ base de $F + G$ alors $d(\mathcal{F}, \mathcal{G})^2 = \frac{G(\vec{PQ}, \vec{e_1}, ..., \vec{e_r})}{G(\vec{e_1}, ..., \vec{e_r})}$

2 Isométries dans un espace affine et dans un espace vectoriel

2.1 Groupe des isométries affines

(Chapitres 6.1 de Géométrie de Patrice Tauvel et 7.9 d'Algèbre linéaire de Joseph Grifone)

1. Définition : Soit $u \in End(E)$, alors on dit que u est une isométrie vectorielle (ou une transformation orthogonale) si $\langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle$, on note $O(E)$ leur ensemble
2. Exemple : Les réflexions vectorielles (symétries vectorielles par rapport à un hyperplan parallèlement à son orthogonal) sont des isométries vectorielles
3. Lemme : Soit $\varphi : E \longrightarrow E$ tel que $\varphi(0) = 0$ et $\forall x, y \in E, \|\varphi(x) - \varphi(y)\| = \|x - y\|$, alors $\varphi \in O(E)$
4. Définition : Soit $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$, alors on dit que f est isométrie si $d(f(P), f(Q)) = d(P, Q)$, et on note $Isom(\mathcal{E})$ leur ensemble, de plus on note $Isom_{\mathcal{A}}(\mathcal{E})$ l'ensemble des isométries conservant une partie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{E}$
5. Exemple : Les translations sont des isométries
6. Théorème : $O(E)$ et $Isom(\mathcal{E})$ sont des groupes pour la composition
7. Théorème : Soit $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$, alors $f \in Isom(\mathcal{E}) \Longleftrightarrow f \in Aff(\mathcal{E}), \vec{f} \in O(E)$
8. Proposition : $f \in Isom(\mathcal{E}) \longmapsto det(\vec{f}) \in \{-1, 1\}$ est un morphisme de groupes surjectifs, son noyau est noté $Isom^+(\mathcal{E})$ et est d'indice 2 dans $Isom(\mathcal{E})$
9. Définition : Un élément de $Isom^+(\mathcal{E})$ est appelé un déplacement, et un élément de $Isom^-(\mathcal{E}) = Isom(\mathcal{E}) \backslash Isom^+(\mathcal{E})$ est appelé un antidéplacement
10. Exemple : Une translation est un déplacemement, une symétrie orthogonale par rapport à un sous-espace $\mathcal{F}$ de codimension paire (respectivement impaire) est un déplacement (respectivement antidéplacement)

2.2 Groupe des isométries vectorielles

(Chapitres 22.3 et 22.4 d'Algèbre et géométrie de Jean-Etienne Rombaldi)

1. Théorème : Soit $u : E \longrightarrow E$, alors $u \in O(E)$ si et seulement si $u \in End(E)$ et $\|u(x)\| = \|x\|$
2. Théorème : Soit $u \in O(E)$ et F sous-espace de E u-stable, alors $F^{\perp}$ est u-stable
3. Définition : Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, alors on dit que A est orthogonale si ${}^tAA = I_n$, et on note $O_n(\mathbb{R})$ leur groupe
4. Exemple : $R(\theta) \in O_2(\mathbb{R})$
5. Proposition : Soit $u \in End(E)$, alors $u \in O(E)$ si et seulement si, dans une base orthonormée, $Mat(u) \in O_n(\mathbb{R})$
6. Théorème : $det(O(E)) \subset \{-1, 1\}$, on note $SO(E) = O(E) \cap det^{-1}(\{1\})$ et $O^{-}(E) = O(E) \cap det^{-1}(\{-1\})$
7. Exemple : $det(R(\theta)) = 1, R(\theta) \in SO_2(\mathbb{R})$
8. Théorème : Soit $u \in O(E)$, alors il existe une base orthonormée b de E telle que $Mat_b(u) = diag(I_p, I_{-q}, R(\theta_1), ..., R(\theta_r))$
9. Proposition : $O_n(\mathbb{R})$ est compact
10. Théorème : L'enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$ est $\overline{B}_{\|\cdot\|_2}(0, 1)$

3 Isométries en dimension 2 et 3

3.1 Classification des isométries du plan

(Chapitres 7.10 et A.8 d'Algèbre linéaire de Joseph Grifone)
On considère $\mathcal{E}$ le plan affine euclidien.

1. Théorème : Soit $u \in O(\mathbb{R}^2)$ alors :
   — Soit $u \in SO(\mathbb{R}^2)$ et dans ce cas il existe une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$ et $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que $Mat(u) = \begin{pmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix}$, ie u est la rotation d'angle θ
   — Soit $u \notin SO(\mathbb{R}^2)$ et dans ce cas il existe une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$ et $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que $Mat(u) = \begin{pmatrix} cos(\theta) & sin(\theta) \\ sin(\theta) & -cos(\theta) \end{pmatrix}$, ie u est la symétrie orthogonale d'axe la droite d'angle polaire $\frac{\theta}{2}$
2. Corollaire : Soit $f \in Isom(\mathbb{R}^2)$, alors f est l'identité, une translation, une rotation, une réflexion ou une composée
3. Lemme : Soit $f \in Aff(\mathcal{E})$ et $Fix(f)$ l'ensemble des points fixes de f, alors :
   — Soit 1 n'est pas valeur propre de $\vec{f}$, dans ce cas f admet un unique point fixe
   — Soit 1 est valeur propre de $\vec{f}$ et $Fix(f) = \varnothing$
   — Soit 1 est valeur propre de $\vec{f}$ et $Fix(f)$ est un sous-espace affine dont la direction est le sous-espace propre $E_1(\vec{f})$
4. Proposition : Soit $f = t_{\vec{v}} \circ R_{\Omega,\theta}$, alors, en vectorialisant en Ω, $\vec{f} = R_{\Omega,\theta}$, donc 1 n'est pas valeur propre de $\vec{f}$, d'où f est une rotation
5. Proposition : Soit $f = t_{\vec{v}} \circ s_{\mathcal{D}}$, alors $\vec{f} = \vec{s}_{\mathcal{D}}$, donc 1 est valeur propre de $\vec{f}$, donc :

- Si f admet une droite de points fixes alors f est une réflexion par rapport à une droite
- Si f n'admet pas de points fixes alors f est un glissement, ie la composée d'une translation et d'une réflexion

6. Théorème : $Isom(\mathcal{E})$ est composé de l'identité, des rotations, des réflexions, des glissements et des translations
7. Exemple : En considérant un répère affine, si $f(A) = f(x, y) = (y, x)$ alors f est une réflexion d'axe d'équation $y = x$, si $f(A) = f(x, y) = (x + 1, y + 1)$ alors f est un glissement d'axe d'équation $y = x$ et de vecteur de translation $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

3.2 Classification des isométries de l'espace

(Chapitres 7.10 et A.8 d'Algèbre linéaire de Joseph Grifone)

1. Théorème : Soit $u \in O(\mathbb{R}^3)$ alors il existe une base orthonormée (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ et $(\theta, \varepsilon) \in [0, 2\pi[\times \{-1, 1\}$ tel que $Mat(u) = \begin{pmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) & 0 \\ sin(\theta) & cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$ et :
   - Si $\varepsilon = 1$ alors $u \in SO(\mathbb{R}^3)$ et
     - Si $\theta = 0$ alors $u = id_{\mathbb{R}^3}$
     - Si $\theta = \pi$ alors u est un renversement d'axe $Vect(e_3)$, ie rotation d'angle θ
     - Sinon u est une rotation d'angle θ et d'axe $Vect(e_3)$
   - Si $\varepsilon = -1$ alors $u \notin SO(\mathbb{R}^3)$ et
     - Si $\theta = 0$ alors u est une réflexion de plan $Vect(e_1, e_2)$
     - Si $\theta = \pi$ alors $u = -id_{\mathbb{R}^3}$
     - Sinon u est une anti-rotation d'angle θ et d'axe $Vect(e_3)$
2. Corollaire : Soit $f \in Isom(\mathbb{R}^3)$, alors f est l'identité, une translation, une rotation, une réflexion, une rotation-réflexion (ou anti-rotation) ou une composée
3. Proposition : Soit $f = t_{\vec{v}} \circ R_{\mathcal{D},\theta}$, alors 1 est valeur propre de $\vec{f}$, donc :
   - Si f admet une droite de points fixes alors f est une rotation
   - Si f n'admet pas de points fixes alors f est un vissage, ie rotation suivie d'une translation
4. Proposition : Soit $f = t_{\vec{(v)}} \circ s_{\mathcal{P}}$, alors 1 est valeur propre de $\vec{f}$, donc :
   - Si f admet un point fixe (un plan de points fixes plus précisément) alors f est une réflexion
   - Si f n'admet pas de point fixe alors f est glissement
5. Proposition : Soit $f = t_{\vec{v}} \circ (s_{\mathcal{P}} \circ R_{\mathcal{D}})$, alors 1 n'est pas valeur propre de $\vec{f}$, donc f admet un unique point fixe, d'où f est une rotation-réflexion (ou anti-rotation)
6. Théorème : $Isom(\mathbb{R}^3)$ est composé de l'identité, des rotations, des réflexions, des glissements, des translations, des rotations-réflexions et des vissages

4 Etudes d'isométries préservant une partie

4.1 Groupes diédraux et des isométries des polygônes réguliers

(Chapitre 3.4.3 d'Algèbre et géométrie de Jean-Etienne Rombaldi)

1. Définition : On dit que G est un groupe de type D_{2n} s'il est dicyclique engendré par r d'ordre n et s d'ordre 2 tels que $rsrs = 1$
2. Théorème : Soit G un groupe de type D_{2n}, alors $G = \{1, r, ..., r^{n-1}\} \cup \{s, sr, ..., sr^{n-1}\}$
3. Corollaire : Les groupes de type D_{2n} sont isomorphes
4. Définition : On note Γ_n l'ensemble des sommets du polygone régulier à n côtés de $\mathbb{R}^2$ et $Isom(\Gamma_n)$ le groupe des isométries conservant Γ_n
5. Exemple : La rotation r d'angle $\frac{2\pi}{n}$ et la réflexion s d'axe une des "diagonales" sont dans $Isom(\Gamma^n)$
6. Théorème : $Isom(\Gamma_n) = \langle r, s\rangle$
7. Exemple : $D_6 \simeq S_3 \simeq Isom(\Gamma_3)$

4.2 Isométries du tetraèdre et du cube

(Chapitre 3.4.4 d'Algèbre et géométrie de Jean-Etienne Rombaldi et Exercice 3.6.6 d'Algèbre et géométrie de Jean-Etienne Rombaldi)

1. Définition : On considère T est le tétraèdre régulier et C le cube de $\mathbb{R}^3$, et $Isom(T)$ et $Isom(C)$ les groupes d'isométries les conservant
2. Théorème : $Isom(T) \simeq S_4$
3. Corollaire : $Isom^+(T) \simeq A_4$
4. Théorème : $Isom(C) = Isom(S)$ avec S l'ensemble des sommets du cube, de même $Isom^+(C) = Isom^+(S)$
5. Remarque : En vectorialisant $\mathbb{R}^3$ en fixant l'origine en l'isobarycentre du cube, on se ramène au cas vectoriel
6. Remarque : Une application affine qui conserve le cube est une isométrie
7. Théorème : $Isom^+(S) \simeq S_4$
8. Corollaire : $Isom(S) \simeq S_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
9. Application : On obtient la table de caractères de S_4 en annexe