Leçon 171 Formes quadratiques réelles, coniques, exemples et applications

Dorian Cacitti-Holland

2020-2021

Références.

1. Algèbre et géométrie de Jean-Etienne Rombaldi
2. Algèbre linéaire de Joseph Grifone
3. Histoires hédonistes de groupes et de géométrie tome 1 de Caldero et Germoni
4. Petit guide de calcul différentiel de François Rouvière

Développements.

1. Formes de Hankel
2. Lemme de Morse

Table des matières

1 Formes quadratiques réelles

1.1 Définition à partir de formes bilinéaires

(Chapitre 15.1 d'Algèbre et géométrie de Jean-Etienne Rombaldi)
On considère E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.

1. Définition : On dit que $q : E \longrightarrow \mathbb{R}$ est une forme quadratique s'il existe $\varphi \in L_2(E)$ tel que $\forall x \in E, q(x) = \varphi(x,x)$, et on note $Q(E)$ leur espace vectoriel
2. Remarque : Il n'y a pas unicité de la forme bilinéaire associée
3. Exemple : Les formes bilinéaires $\varphi_1(x,y) = x_1y_1 + x_2y_2$ et $\varphi_2(x,y) = x_1y_1 + x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_2$ définissent la même forme quadratique
4. Théorème : Soit $q \in Q(E)$, alors il existe une unique $\varphi \in S_2(E)$, appelé forme polaire, tel que $\forall x \in E, q(x) = \varphi(x,x)$
5. Corollaire : $Q(E) \simeq S_2(E) \simeq S_n(\mathbb{R})$, donc $dim(Q(E)) = \frac{n(n+1)}{2}$
6. Proposition : Soit $q \in Q(E)$ et φ sa forme polaire, alors on a $\forall (x,y) \in E^2, \varphi(x,y) = \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y)) = \frac{1}{4}(q(x+y) - q(x-y))$ et $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{R} \times E, q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$
7. Définition : Soit $\varphi \in L_2(E)$ et b base de E, alors le déterminant de φ dans la base b est $\Delta_b(\varphi) = det(Mat_b(\varphi))$
8. Proposition : Soit $\varphi \in L_2(E)$ et b_1, b_2 des bases de E, alors $\Delta_{b_2}(\varphi) = (det(P))^2 \Delta_{b_1}(\varphi)$
9. Définition : Soit $q \in Q(E)$ de forme polaire φ et b base de E, alors $Mat_b(q) = Mat_b(\varphi)$ et $\Delta_b(q) = \Delta_b(\varphi)$
10. Proposition : Soit $q \in Q(E)$ de forme polaire φ, b base de E et $A = Mat_b(q)$, alors $\forall x \in E, q(x) = {}^tXMat_b(q)X = \sum\limits_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij}x_ix_j = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + 2\sum\limits_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij}x_ix_j$ et $\forall (x,y) \in E^2, \varphi(x,y) = \langle AX, Y \rangle$

1.2 Réduction et méthode de Gauss

(Chapitres 7.3 et 9.5 d'Algèbre linéaire de Joseph Grifone)

1. Définition : Une base $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ de E est dite orthogonale (respectivement orthonormé) pour φ si $\varphi(e_i, e_j) = \delta_{ij}\varphi(e_i, e_i)$ (respectivement δ_{ij})
2. Proposition : Soit $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ base de E, alors e est une base orthogonale pour φ si et seulement si $Mat_e(q) = diag(q(e_1), ..., q(e_n))$
3. Remarque : Dans ce cas le rang de q est le nombre de $q(e_i)$ non nuls
4. Proposition : S'il existe une base orthonormée alors q est de rang n
5. Théorème : Il existe une base orthogonale de E pour q, autrement dit il existe une base e de E telle que $q(x) = a_1x_1^2 + ... + a_rx_r^2$ avec $a_i = q(e_i)$ et $r = rg(q)$, autrement dit $Mat_e(q) = diag(a_{11}, ..., a_{rr}, 0, ..., 0)$
6. Corollaire : Théorème spectral : Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$, alors il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que ${}^tPAP$ soit diagonale

7. Proposition : Méthode de réduction de Gauss avec un terme carré : Soit e la base canonique de $\mathbb{R}^n$, si $q(x) = a_{11}x_1^2 + ... + a_{nn}x_n^2 + ... + a_{ij}x_ix_j + ...$ avec $a_{i_0i_0} \neq 0$, alors :
   - On ordonne suivant la variable x_{i_0}
   - On écrit les termes contenant x_{i_0} comme le début d'un carré
   - On obtient le carré d'une forme linéaire plus des termes sans x_1
   - On recommence l'opération sur les termes qui ne contiennent pas de x_1 jusqu'à obtenir une somme de carrés de formes linéaires
8. Exemple : Si $q(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3$ alors $a_{11} = 1 \neq 0$, donc on écrit $q(x) = (x_1 + x_2)^2 - x_2^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_2x_3$, puis $q(x) = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 - 2x_3)^2 + x_3^2$
9. Proposition : Méthode de réduction de Gauss avec que des termes rectangles : Soit e base de E, si $q(x) = a_{12}x_1x_2 + ... + a_{ik}x_ix_k + ... + a_{n-1,n}x_{n-1}x_n$ alors :
   - On choisit un terme rectangle à coefficient non nul kx_ix_j avec $k \neq 0$
   - On calcule les dérivées partielles $\frac{\partial q}{\partial x_i}$ et $\frac{\partial q}{\partial x_j}$ pour écrire $q(x) = \frac{1}{k}\frac{\partial q}{\partial x_i}\frac{\partial q}{\partial x_j} + ...$
   - On obtient $q(x) = \frac{1}{k}\varphi_1(x)\varphi_2(x) + ...$ avec ... sans termes en x_i ou en x_j, et avec φ_1, φ_2 des formes linéaires
   - On écrit $\varphi_1\varphi_2 = \frac{1}{4}((\varphi_1^2 + \varphi_2)^2 - (\varphi_1 - \varphi_2)^2)$
   - Si dans les termes correctifs on a un terme carré alors on procède comme dans la proposition précédente
   - S'il n'y a que des termes rectangle alors on recommence
10. Exemple : Si $q(x) = 5x_1x_2 + 6x_1x_3 + 3x_2x_3$, on a $\frac{\partial q}{\partial x_1} = 5x_2 + 6x_3$, $\frac{\partial q}{\partial x_2} = 5x_1 + 3x_3$, donc $q(x) = \frac{1}{5}(5x_2 + 6x_3)(5x_1 + 3x_3) - \frac{18}{5}x_3^2$, puis $q(x) = \frac{1}{20}(5x_1 + 5x_2 + 9x_3)^2 - \frac{1}{20}(5x_1 + 5x_2 - 3x_3)^2 - \frac{18}{5}x_3^2$
11. Théorème : A partir de la réduction de Gauss, on peut déterminer une base orthogonale pour q en résolvant $\begin{cases} x_1' & = & \varphi_1(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n' & = & \varphi_n(x) \end{cases}$ avec φ_i obtenus grâce à la réduction de Gauss, on obtient $x = Px'$ avec $P \in GL_n(\mathbb{R})$ dont les vecteurs colonnes sont les vecteurs de la base orthogonale pour q
12. Exemple : Si $q(x) = x_1^2 + 3x_2^2 + 7x_3^2 + 2x_1x_2 + 8x_2x_3$ alors la réduction de Gauss donne $q(x) = (x_1+x_2)^2 + 2(x_2+2x_3)^2 - x_3^2$, ainsi le système à résoudre est $\begin{cases} x_1' & = & x_1 + x_2 \\ x_2' & = & x_2 + 2x_3 \\ x_3 & = & x_3 \end{cases}$ ce qui donne $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ comme base de vecteurs orthogonaux

1.3 Orthogonalisation simultanée

(Chapitre 9.10 d'Algèbre linéaire de Joseph Grifone)
On considère q une forme quadratique et $\langle , \rangle$ un produit scalaire sur E.

1. Lemme : Soit φ la forme polaire de q, alors il existe un unique $f_\varphi \in End(E)$ tel que $\langle x, f_\varphi(y) \rangle = \varphi(x, y)$

2. Lemme : Dans ce cas, f_φ est auto-adjoint pour $\langle , \rangle$
3. Lemme : Dans ce cas, les sous-espaces propres de f_φ sont orthogonaux deux à deux pour $\langle , \rangle$
4. Théorème : Il existe une base de E orthogonales pour q et pour $\langle , \rangle$
5. Corollaire : Soit e base de E et $S = Mat_e(q)$, alors on peut construire une base de E orthogonale pour q formée de vecteurs propres de S, de plus $sign(q) = (n_+, n_-)$ avec $n_+(n_-)$ le nombre de valeurs propres strictement positives (négatives) de S
6. Exemple : Si $E = \mathbb{R}^3$ et $q(x) = -2x_1^2 - 2x_2^2 - 2x_3^2 + 6x_1x_2 + 6x_2x_3 + 6x_1x_3$ alors $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$ pour q et $\langle , \rangle$

2 Classification des formes quadratiques

2.1 Cas complexe et signature

(Chapitres 15.3 d'Algèbre et géoémtrie de Jean-Etienne Rombaldi et 9.5 d'Algèbre linéaire de Joseph Grifone)

1. Théorème : Si E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, alors il existe une base e de E tel que $q(x) = x_1^2 + ... + x_r^2$ avec $r = rg(q)$, autrement dit $Mat_e(q) = diag(I_r, 0_{n-r})$
2. Corollaire : Dans ce cas il existe une base orthonormée pour q si et seulement si $rg(q) = n$ ie q non dégénérée
3. Théorème : Si E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, alors il existe une base e de E tel que $q(x) = x_1^2 + ... + x_p^2 - x_{p+1}^2 - ... - x_r^2$, ie $Mat_e(q) = diag(I_p, I_{r-p}, I_{n-r})$
4. Définition : Dans ce cas le couple $sign(q) = (p, r-p)$ est appelé signature de q
5. Corollaire : Dans ce cas q est définie négative si et seulement si $sign(q) = (n, 0)$ si et seulement il existe une base orthonormée pour q, définie négative si et seulement si $sign(q) = (0, n)$, et non dégénéré si et seulement si $sign(q) = (p, n-p)$
6. Exemple : Si $q(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 15x_3^2 - 4x_1x_2 + 6x_1x_3 - 8x_2x_3$ alors $sign(q) = (2, 1)$

2.2 Utilisation pour étudier le nombre de racines d'un polynôme réel

(Exercice V.D.26 de Histoires hédonistes de groupes et de géométries tome 1 de Caldero et Germoni)

On considère $P \in \mathbb{R}[X]$.

1. Définition : Soit $x \in \mathbb{R}$, alors on dit que x est une racine de P si $P(x) = 0$, de plus on dit que x est de multiplicité m si $(X-x)^m \mid P$ et $(X-x)^{m+1}$ ne divise pas P
2. Théorème : P est scindé sur $\mathbb{C}$

3. Lemme : On note $x_1, ..., x_t$ les racines complexes distinctes de P, $m_1, ..., m_t$ leurs multiplicité respectives et $s_k = m_1 x_1^k + ... m_t x_t^k$ appelé somme de Newton, alors $\sum\limits_{0 \leq i,j \leq n-1} s_{i+j} X_i X_j$ définit une forme quadratique σ sur $\mathbb{C}^n$ et une forme quadratique $\sigma_{\mathbb{R}}$ sur $\mathbb{R}$
4. Proposition : Dans ce cas, soit $\varphi_k(y) = y_0 + x_k y_1 + ... + x_k^{n-1} y_{n-1}$, alors les φ_k sont des formes linéaires indépendants sur $\mathbb{C}^n$, $\sigma = \sum\limits_{k=1}^{t} m_k \varphi_k^2$ et le nombre de racines distinctes de P est $t = p + q$ avec $sign(\sigma_{\mathbb{R}}) = (p, q)$
5. Corollaire : Dans ce cas, le nombre de racines réelles distinctes de P est $p - q$
6. Exemple :

2.3 Utilisation pour étudier une application deux fois différentiables

(Chapitre 6 du Petit guide de calcul de différentiel de François Rouvière)
On considère U un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

1. Proposition : Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiable, alors sa différentielle ou plutôt son gradient définit une application $\nabla f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$
2. Définition : On dit que f est deux fois différentiables si ∇f est différentiable, dans ce cas on note $d^2 f = d(df)$ et $H_f = J_{\nabla f}$, ie $H_f = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{1 \leq i,j \leq n}$
3. Remarque : Dans ce cas, pour $a \in U$, $h \longmapsto \langle \nabla f(a), h \rangle$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$ et $(h, k) \longmapsto^t hH_f(a)k$ une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^n$
4. Théorème de Schwartz : Dans ce cas, $H_f(a)$ est une matrice symétrique
5. Théorème : Formule de Taylor avec reste intégral : Dans ce cas, si $[a, a+h] \subset U$ alors $f(a+h) = f(a) + df(a)(h) + \int_0^1 (1-t) d^2 f(a+th)(h,h) dt = f(a) + \langle \nabla f(a), h \rangle + \int_0^1 (1-t)^t h H_f(a+th) h dt$
6. Lemme : Soit $A_0 \in S_n(\mathbb{R}) \cap GL_n(\mathbb{R})$ et $\varphi : \begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & S_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & {}^t M A_0 M \end{array}$, alors $d\varphi(I_n) : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow S_n(\mathbb{R})$ est surjective et il existe un voisinage V de A_0 dans $S_n(\mathbb{R})$ et $\chi : V \longrightarrow GL_n(\mathbb{R})$ de classe C^1 tels que $\forall A \in V, A = \varphi(\chi(A)) = {}^t\chi(A) A_0 \chi(A) = {}^t M A_0 M$
7. Théorème de Morse : Si $0 \in U$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 tel que 0 soit un point critique quadratique non dégénéré de f (ie $df(0) = 0$ et la matrice symétrique $H_f(0)$ est non dégénérée de signature $(p, n-p)$), alors il existe V, W voisinages de 0 et un C^1-difféomorphisme $\varphi : V \longrightarrow W$ tel que $\varphi(0) = 0$ *et* $\forall x \in V, \quad f(x) - f(0) = \varphi(x)_1^2 + ... + \varphi(x)_p^2 - \varphi(x)_{p+1}^2 - ... - \varphi(x)_n^2$

3 Application à l'étude des coniques

3.1 Définition d'une conique à partir d'une forme quadratique et d'une forme linéaire

(Chapitre A.12 d'Algèbre linéaire de Joseph Grifone)
On considère $q \in Q(\mathbb{R}^2) \backslash \{0\}, \varphi \in (\mathbb{R}^2)^*$ et $k \in \mathbb{R}$,

1. Définition : Une conique C est l'ensemble des $v \in \mathbb{R}^2$ tels que $q(v) + \varphi(v) = k$
2. Remarque : Quitte à échanger les signes on peut supposer $sign(q) = (2,0), (1,1), (1,0)$
3. Proposition : Soit e la base canonique de $\mathbb{R}^2$, alors dans cette base l'équation de C est $\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 + \lambda x + \mu y = k$
4. Exemple : Si $\alpha = \gamma = k = 1, \beta = \lambda = \mu = 0$ alors on retrouve l'équation du cercle unité
5. Théorème : D'après l'orthodiagonalisation simultanée, il existe une base b de $\mathbb{R}^2$ orthogonale pour q et $\langle , \rangle$, ainsi dans cette base l'équation de la conique est $ax^2 + by^2 - 2rx - 2ry = k$

3.2 Classification des coniques

(Chapitre A.12 d'Algèbre linéaire de Joseph Grifone)

1. Proposition : Si q est non dégénérée alors $a, b \neq 0$, donc l'équation de la canonique dans une base de $\mathbb{R}^2$ $ax^2 + bx^2 = h$ avec $h \in \mathbb{R}$
2. Corollaire : Dans ce cas, si $sign(q) = (2,0)$ alors :
   — Si $h < 0$ alors $C = \varnothing$
   — Si $h = 0$ alors $C = \{0\}$
   — Si $h > 0$ alors C est une ellipse d'équation $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$
3. Corollaire : Dans ce cas, si $sign(q) = (1,1)$ alors $ab < 0$:
   — Si $h = 0$ alors C est l'ensemble des deux droites d'équations $y = \sqrt{\left|\frac{a}{b}\right|}x$ et $y = -\sqrt{\left|\frac{a}{b}\right|}x$
   — Si $h \neq 0$ et $a < 0 < b$ alors C est une hyperbole d'équation $-\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$
   — Si $h \neq 0$ et $b < 0 < a$ alors C est une hyperbole d'équation $\frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2} = 1$
4. Proposition : Si q est dégénérée alors $ab = 0$ et $sign(q) = (1,0)$, alors l'équation de C est de la forme $a\left(x - \frac{r}{a}\right)^2 - 2sy = h$
5. Corollaire : Dans ce cas, si $s \neq 0$ alors C est une parabole d'équation $y = ax^2$
6. Corollaire : Dans ce cas, si $s = 0$ alors l'équation de C est de la forme $x^2 = \frac{h}{a}$, ainsi :
   — Si $h < 0$ alors $C = \varnothing$
   — Si $h = 0$ alors C est la droite d'équation $x = 0$
   — Si $h > 0$ alors C est l'ensemble des droites d'équations $x = \sqrt{\frac{h}{a}}$ et $x = -\sqrt{\frac{h}{a}}$
7. Remarque : Les différentes coniques sont représentées en annexe

3.3 Point de vue géométrique

(Chapitre 16.1 d'Algèbre et géométrie de Jean-Etienne Rombaldi)
On considère $\mathbb{R}^2$ le plan affine eudlidien, D une droite affine de $\mathbb{R}^2$, $F \in \mathbb{R}^2 \backslash D$ et $z \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Définition : On appelle conique de directrice D, de foyer F et d'excentricité e, l'ensemble $C = \{M \in \mathcal{P}, d(M,F) = ed(M,\mathcal{D})\}$

2. Définition : Dans ce cas on dit que C est une ellipse si $e < 1$, une parabole si $e = 1$ et une hyperbole si $e > 1$
3. Remarque : $d(M, D) = 0 \Leftrightarrow M \in D$ donc $C = \{M \in \mathbb{R}^2 \backslash D, \frac{d(M,F)}{d(M,D)} = e\}$
4. Remarque : Si $H = p_D(M)$ alors $C = \{M \in \mathbb{R}^2 \backslash D, \frac{MF}{MH} = e\}$
5. Définition : La perpendiculaire Δ à D passant par F est appelée axe focal (ou grand axe) de la conique
6. Théorème : Si C est une parabole alors C coupe son axe focal en unique point qui est le milieu de $[FK]$ avec K projeté orthogonal de F sur D
7. Théorème : Si C est une ellipse ou une hyperbole alors C coupe son axe focal en deux points qui sont le barycentre de $\{(F, 1), (K, e)\}$ et le barycentre de $\{(F, 1), (K, -e)\}$
8. Remarque : Si $O \in \Delta$, $\vec{i} = \frac{1}{FK}F\vec{K}$ et $\vec{j} \in \vec{D}$ alors $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormée de $\mathbb{R}^2$
9. Théorème : Dans ce repère C a pour équation $(1 - e^2)x^2 + y^2 + 2(e^2 x_K - x_F)x + x_F^2 - e^2 x_K^2 = 0$