Leçon 205 Espaces complets, exemples et applications

Dorian Cacitti-Holland

2020-2021

Références.

1. Topologie générale et espaces normés de Nawfa El Hage Hassan
2. Cours d'analyse fonctionnelle de Daniel Li
3. Analyse de Xavier Gourdon
4. Equations différentielles de Florent Berthelin
5. Théorie de l'intégration de Briane et Pagès
6. Objectif agrégation
7. Analyse numérique et équations différentielles de Jean-Pierre Demailly

Développements.

1. Transformation de Fourier sur $L^2(\mathbb{R})$ et théorème de Plancherel
2. Théorème de Banach-Steinhaus et série de Fourier divergente
3. Théorème de Riesz-Fischer
4. Théorème de projection sur un convexe fermé non vide

Table des matières

1 Complétude dans un espace métrique

1.1 Définition par les suites de Cauchy

(Chapitre 2.6 de Topologie générale et espaces normés de Nawfal El Hage Hassan)
On consdière (X, d) espace métrique et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$.

1. Définiton : On dit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy si
$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall m, n \geq N, d(x_m, x_n) \leq \varepsilon$
2. Proposition : Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy
3. Proposition : Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée
4. Théorème : Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy et admet une valeur d'adhérence alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente
5. Définition : On dit que X est complet si toute suite de Cauchy est convergente
6. Exemple : $\mathbb{R}^d, \mathbb{C}^d$ sont complets mais pas $\mathbb{Q}$
7. Exemple : $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{Q}$ mais converge vers $e \notin \mathbb{Q}$

1.2 Propriétés et théorème de Baire

(Chapitres 2.6 de Topologie générale et espaces normés de Nawfal El Hage Hassan et IV.1 du Cours d'analyse fonctionnelle de Daniel Li)
On considère $A \subset X$.

1. Proposition : Si A complet alors A est fermé
2. Proposition : Si X complet et A fermé alors A complet
3. Théorème : Si $X_1, ..., X_n$ espaces métriques alors $X_1 \times ... \times X_n$ complet si et seulement si pour tout $i \in [\![1, n]\!], X_i$ est complet
4. Proposition : Si X complet, $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite décroissante de fermés de E tel que $\delta(F_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ alors il existe $x \in E$ tel que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \{x\}$
5. Théorème de Baire : Si X complet et $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de fermés d'intérieur vide alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est d'intérieur vide
6. Corollaire : Si X est complet et $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ famille d'ouverts denses dans X alors $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ est dense dans X
7. Corollaire : Si X est complet et $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de fermés de X telle que $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que F_n soit d'intérieur non vide

1.3 Théorème de point fixe

(Chapitres 2.6 de Topologie générale et espaces normés de Nawfal El Hage Hassan et 3.2 de Equations différentielles de Florent Berthelin)
On considère $f : X \longrightarrow X$.

1. Définition : On dit f est contractante si f est k-lipschitzienne avec $k < 1$
2. Théorème du point fixe : Si X complet et f contractante alors f admet un unique point fixe $x \in X$ et pour tout $x_0 \in X, x_{n+1} = f(x_n)$, on a $x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} x$ et $d(x, x_n) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_0, x_1)$
3. Remarque : On dit que la convergence est exponentiellement rapide
4. Corollaire : Si f^p contractante alors f admet un unique point fixe
5. Remarque : Le théorème est faux si $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$
6. Exemple : $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \sqrt{x^2 + 1}$ n'a aucun point fixe
7. Proposition : Si $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ et X compact alors f admet un unique point fixe et on a la convergence précédente (Exercice 1.3. d'Analyse de Xavier Gourdon)
8. Application : Lemme : Soit $(t_0, y_0, \alpha, \beta, r_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}^N \times [0, +\infty[^2 \times\,]0, +\infty]$, $I := [t_0 - \alpha, t_0 + \beta]$, $f : I \times \overline{B}(y_0, r_0) \longrightarrow \mathbb{C}^N$ continue et globalement lipschitzienne par rapport à la variable d'état, $\phi : y \in C(I, \overline{B}(y_0, r_0)) \longrightarrow \left[t \in I \longmapsto \phi(y)(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds \right]$, si $\phi(C(I, \overline{B}(y_0, r_0))) \subset C(I, \overline{B}(y_0, r_0))$ alors il existe une unique solution globale de $y' = f(t, y), y(t_0) = y_0$
9. Théorème de Cauchy-Lispchitz globalement lipschitzien : Si f continue et globalement lipschitzien par rapport à la variable d'état alors il existe une unique solution globale de $y' = f(t, y), y(t_0) = t_0$
10. Exemple : cos est 1-lipschitzienne, donc $y' = cos(y), y(0) = y_0 \in \mathbb{R}$ admet une unique solution définie sur $\mathbb{R}$

1.4 Prolongement d'applications

(Chapitre 2.6 de Topologie générale et espaces normés de Nawfal El Hage Hassan)

1. Théorème : Soit X et Y deux espaces métriques, A partie dense dans X et $f : A \longrightarrow Y$ uniformément continue, si Y est complet alors f se prolonge de manière unique en une application continue $\tilde{f} : X \longrightarrow Y$, de plus $\tilde{f}$ est uniformément continue
2. Remarque : La continuité n'est pas suffisante
3. Exemple : Soit $X = [0, 1]$, $A = [0, 1[$ et $f : x \in A \longmapsto \frac{1}{1-x} \in \mathbb{R}$, alors A est dense dans X et f continue mais f ne se prolonge pas par continuité sur X

2 Complétude dans un espace vectoriel normé

2.1 Définition et premières propriétés

(Chapitres 1.5 d'Analyse de Xavier Gourdon, 6.7 de Topologie générale et espaces normés de Nawfal El Hage Hassan et 23.2 d'Algèbre et géométrie de Jean-Etienne Rombaldi)

On considère E et F deux espaces vectoriels normés.

1. Définition : On dit que E est de Banach si E est complet

2. Définition : $\|f\| = \sup_{x \in S(0,1)} \|f(x)\|$ définit une norme sur $\mathcal{L}(E, F)$
3. Théorème : Si F est de Banach alors $\mathcal{L}(E, F)$ est un espace de Banach
4. Corollaire : $E' = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ de Banach
5. Proposition : Si E est complet alors toute série absolument convergente est convergente
6. Corollaire : E est complet si et seulement si toute série absolument convergente est convergente
7. Application : La convergence normale d'une série de fonctions bornées à valeurs dans un espace de Banach implique la convergence uniforme
8. Exemple : La fonction exponentielle matricielle $exp(A) = \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!}$ est de classe C^1 sur $M_n(K)$ et $dexp(A)(H) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \left(\sum_{\substack{0 \leq i,j \leq k-1 \\ i+j=k-1}} A^i H A^j \right)$
9. Proposition : Si E de Banach et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\|u\| < 1$ alors $id_E - u$ est inversible et son inverse est $\sum_{n=0}^{+\infty} u^n$

2.2 Prolongement d'applications linéaires

(Chapitres 6.3 de Topologie générale et espaces normés de Nawfal El Hage Hassan et III.2.3 du Cours d'analyse fonctionnelle de Daniel Li)

1. Théorème : Soit E un espace normé, F un espace de Banach, H un sous-espace vectoriel de E dense dans E et $f \in \mathcal{L}(H, F)$, alors il existe un unique $\tilde{f} \in \mathcal{L}(E, F)$ prolongeant f, de plus $\|f\| = \|g\|$
2. Proposition : $A := \{f \in L^1(\mathbb{R}), \mathcal{F}(f) \in L^1(\mathbb{R})\}$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$ pour la norme $\|\cdot\|_2$
3. Proposition : $L^2(\mathbb{R})$ est complet pour la norme $\|\cdot\|_2$
4. Théorème de Plancherel : La transformation de Fourier $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow C_0(\mathbb{R})$ se prolonge de façon unique en un isomorphisme isométrique de $L^2(\mathbb{R})$ sur lui-même

2.3 Conséquences du théorème de Baire dans un espace de Banach

(Chapitre IV.2 et IV.3 du Cours d'analyse fonctionnelle de Daniel Li)
On considère E et F deux espaces de Banach.

1. Théorème de Banach-Steinhaus : Soit $(T_i)_{i \in I} \in \mathcal{L}(E, F)^I$ tel que $\forall x \in E, \sup_{i \in I} \|T_i(x)\| < +\infty$ alors $\sup_{i \in I} \|T_i\| < +\infty$
2. Application : Il existe $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$ ne coïncidant pas avec sa série de Fourier (Exercice A.8 d'Analyse de Xavier Gourdon)

3. Corollaire : Si $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathcal{L}(E,F))^{\mathbb{N}}$ tel que $\forall x \in E, T_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} T(x)$ alors $\underset{n\in\mathbb{N}}{sup} \|T_n\| < +\infty$, $T \in \mathcal{L}(E,F)$ et $\|T\| \leq \underset{n\in\mathbb{N}}{liminf} \|T_n\|$
4. Théorème de l'application ouverte : Si $T \in \mathcal{L}(E,F)$ surjective alors T est ouverte
5. Théorème des isomorphismes de Banach : Si $T \in \mathcal{L}(E,F)$ bijective alors T est un homéomorphisme
6. Corollaire : Si E de Banach pour deux normes comparables alors ces normes sont équivalentes
7. Théorème de graphe fermé : Si $T \in L(E,F)$ alors T continue si et seulement si $Graph(f)$ est fermé dans $E \times F$
8. Exemple : Pour la norme $\|\cdot\|_\infty$, $D : f \in C^1([0,1]) \longrightarrow f' \in C^0([0,1])$ n'est pas continue mais de graphe fermé, en effet $C^1([0,1])$ n'est pas complet
9. Corollaire : La transformation de Fourier $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \longrightarrow C_0(\mathbb{R})$ n'est pas surjective

2.4 Cas particulier des espaces L^p

(Chapitres 9.1, 9.2 et 9.3 de Théorie de l'intégration de Briane et Pagès)

On considère $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions f mesurables telles que $\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx < +\infty$ et $L^p(\mathbb{R})$ l'espace $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ quotienté par la relation d'équivalence d'égalité presque partout.

1. Lemme : Inégalité de Young : Soit $(u, v, \alpha) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^* \times \,]0,1[$, alors $u^\alpha v^{1-\alpha} \leq \alpha u + (1-\alpha)v$ avec égalité si et seulement si $u = v$
2. Théorème : Inégalité de Hölder : Soit $(f,g) \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})^2$ et $(p,q) \in \,]1,+\infty[^2$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$
3. Corollaire : Inégalité de Minkowski : Soit $(f,g) \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})^2$, alors $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$
4. Remarque : $\mathcal{L}^p$ n'est pas un espace vectoriel normé mais L^p oui
5. Théorème de Riesz-Fisher : L'espace vectoriel normé $L^p(\mathbb{R})$ est de Banach
6. Corollaire : Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathcal{L}^p)^{\mathbb{N}}$ et $f \in L^p$ tel que $f_n \underset{n\to+\infty}{\overset{L^p}{\longrightarrow}} f$ alors il existe une extractrice $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ et $g \in L^p$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}, |f_{\varphi(n)}| \leq g$ μ-presque partout et $f_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\overset{\mu-pp}{\longrightarrow}} f$

3 Complétude dans un espace de Hilbert

3.1 Théorème de projection et conséquences

(Chapitre II.2.1 du Cours d'analyse fonctionnelle de Daniel Li)

On considère H un espace de Hilbert, ie un espace préhilbertien complet.

1. Théorème de projection sur un convexe fermé non vide : Soit C un convexe fermé non vide de H et $x \in H$, alors il existe un unique $p_C(x) \in C$ tel que $d(x,C) = \|x - p_C(x)\|$, de plus on a la caractérisation, pour $y \in H$, $y = p_C(x)$ si et seulement si $y \in C, \forall z \in C, Re(\langle x-y, z-y\rangle) \leq 0$

2. Corollaire : Soit C convexe fermé non vide de H, alors $p_C : H \longrightarrow C$ est 1-lipschizienne, donc continue
3. Théorème de projection sur un sous-espace vectoriel fermé : Soit F sous-espace vectoriel fermé de H, alors $p_F \in \mathcal{L}(H, F)$ et pour $x \in H$, on a la caractérisation, pour $y \in H$, $y = p_F(x)$ si et seulement si $y \in F, x - y \in F^\perp$
4. Corollaire : Soit F sous-espace vectoriel de H, alors F est dense dans H si et seulement si $F^\perp = \{0\}$
5. Application : Les fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à support compact sont denses dans $L^2(\mathbb{R})$

3.2 Bases orthonormées

(Chapitres II.3.3, II.3.4 et II.4.2 du Cours d'analyse fonctionnelle de Daniel Li)
On considère H un espace de Hilbert.

1. Théorème : Si H séparable alors H admet une base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$
2. Exemple : Les $e_n(t) = e^{2\pi i n t}$ forment une base hilbertienne de $L^2_{2\pi}$
3. Corollaire : Si H séparable alors H est isomorphe à l^2
4. Proposition : Inégalité de Bessel : Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ famille orthonormale de H et $x \in H$, alors $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |\langle x, x_n\rangle| \leq \|x\|^2$
5. Théorème : Soit $x \in H$, alors $x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \langle x, e_n\rangle e_n$
6. Corollaire : Formule de Parseval : Soit $x \in H$, alors $\|x\|^2 = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2$
7. Exemple : Pour f 1-périodique et $f(t) = t$ sur $[0, 1[$, on obtient $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$
8. Corollaire : $S : x \in H \longmapsto (\langle x, e_n\rangle)_{n\in\mathbb{N}} \in l_2$ est un isomorphisme d'espaces de Hilbert, ie conservant le produit scalaire

3.3 Etude de $L^2(I, \rho)$

(Chapitres II.5 d'Analyse numérique et équations différentielles de Jean-Pierre Demailly et 3.1.5 d'Objectif agrégation)
On considère I intervalle de $\mathbb{R}$.

1. Définition : Soit $\rho : I \longrightarrow \mathbb{R}$, on dit que ρ est une fonction poids si ρ est mesurable positive et $\forall n \in \mathbb{N}, \int_I |x|^n \rho(x) dx < +\infty$
2. Exemple : $\rho(x) = e^{-x^2}$
3. Proposition : Il existe une unique famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes unitaires orthogonaux deux à deux de degrés respectifs n, ils sont appelés les polynômes orthogonaux associés au poids ρ
4. Exemple : Si $\rho(x) = e^{-x^2}$ alors les P_n sont les polynômes de Hermite $P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n} e^{x^2} \frac{d^n(e^{-x^2})}{dx^n}$

5. Théorème : Soit $f \in L^2(I, \rho)$, alors il existe un unique polynôme $p_n \in Vect(P_0, ..., P_n)$ tel que $\|f - p_n\|_\rho = d(f, Vect(P_0, ..., P_n))$
6. Théorème : Si I est borné, soit $f \in L^2(I, \rho)$, alors $p_n \xrightarrow[n \to +\infty]{L^2} f$
7. Application : Si les P_n sont connus alors on peut calculer les p_n grâce aux $\langle f, P_n \rangle$
8. Théorème : S'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\int_I e^{\alpha|x|}\rho(x)dx < +\infty$ alors les $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une base hilbertienne de $L^2(I, \rho)$