Leçon 215 Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$, exemples et applications

Dorian Cacitti-Holland

2020-2021

Références.

1. Calcul différentiel de Mohammed El Amrani
2. Analyse de Xavier Gourdon
3. Petit guide de calcul différentiel de François Rouvière
4. Les contre-exemples en mathématiques de Bertrand Hauchecorne
5. Eléments d'analyse réelle de Jean-Etienne Rombaldi

Développements.

1. Différentielle de l'exponentielle matricielle
2. Lemme de Morse
3. Minimisation de fonctionnelle quadratique

Table des matières

1 Applications différentiables et dérivées partielles

1.1 Différentielle

(Chapitre 3.1 de Calcul différentiel de Mohammed El Amrani)
On considère U ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^p$.

1. Définition : Soit $a \in U$, alors on dit que f est différentiable en a s'il existe $L \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ tel que $\forall h \in \mathbb{R}^n, f(a+h) \underset{\|h\| \to +\infty}{=} f(a) + L(h) + o(\|h\|)$
2. Proposition : Dans ce cas L est unique, L est noté $L = df(a)$ et est appelé différentielle de f en a, de plus l'application $df : U \longrightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ est appelé différentielle de f
3. Remarque : La différentiabilité généralise la dérivabilité, en effet soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable en $a \in \mathbb{R}$, alors f est différentiable en a et $df(a)(h) = f'(a)h$
4. Exemple : $d(\|\cdot\|^2)(x)(h) = 2\langle x, h\rangle$
5. Proposition : Si f linéaire alors f différentiable et $df(x) = f$
6. Corollaire : Si $f : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l \longrightarrow \mathbb{R}^p$ bilinéaire alors f différentiable et $df(x,y)(h,k) = f(x,k) + f(h,y)$
7. Exemple : Si $f : (A,B) \in M_n(\mathbb{R})^2 \longmapsto AB$ alors f différentiable et $df(A,B)(H,K) = AK + HB$
8. Proposition : Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^{p_1} \times ... \times \mathbb{R}^{p_r}$ et $a \in U$, alors f est différentiable en a si et seulement si les f_i composantes le sont, dans ce cas $h \longmapsto df(a)(h) = (df_1(a), ..., df_p(a)(h))$

1.2 Opérations algébriques

(Chapitre 3.2 de Calcul différentiel de Mohammed El Amrani)

1. Proposition : Soit $f, g : U \longrightarrow \mathbb{R}^p$ différentiable en $a \in U$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, alors $\alpha f + \beta g$ est différentiable en a et $d(\alpha f + \beta g)(a) = \alpha df(a) + \beta dg(a)$
2. Proposition : Si f différentiable en $a \in U$ alors f continue en a
3. Remarque : La réciproque est fausse
4. Exemple : La fonction $\sqrt{|x|}$ est continue sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas différentiable en 0
5. Théorème : Soit U ouvert de $\mathbb{R}^n$, V ouvert de $\mathbb{R}^p$, $f : U \longrightarrow V$ différentiable en $a \in U$ et $g : V \longrightarrow \mathbb{R}^m$ différentiable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est différentiable en a et $d(f \circ g)(a) = dg(f(a)) \circ df(a) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$
6. Exemple : Si $f(x) = \|x\|^2$ sur $\mathbb{R}^n$ et $g(u) = \sqrt{u}$ sur $\mathbb{R}$ alors $f \circ g = \|\cdot\|$ est différentiable sur $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ et $d\,\|\cdot\|\,(a)(h) = \frac{\langle a,h\rangle}{\|a\|}$
7. Proposition : Soit I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $\gamma : I \longrightarrow U$ dérivable en $a \in I$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^p$ différentiable en $\gamma(a)$, alors $f \circ \gamma$ est dérivable en a et $(f \circ \gamma)'(a) = df(\gamma(a))(\gamma'(a))$

1.3 Dérivées directionnelles et dérivées partielles

(Chapitre 3.3 de Calcul différentiel de Mohammed El Amrani)

1. Définition : On dit que f admet une dérivée en a suivant le vecteur $v \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ si $t \longmapsto f(a+tv)$ est dérivable en 0, dans ce cas sa dérivée est noté $\frac{\partial f}{\partial v}(a)$
2. Exemple : Si $f(x,y) = x^2 - y^3$, $v = (1,0)$ alors f admet une dérivée en $(1,2)$ selon v et $\frac{\partial f}{\partial v}(1,2) = 2$
3. Proposition : Si f différentiable en $a \in U$ alors pour tout $v \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, f admet une dérivée en a suivant v et $\frac{\partial f}{\partial v}(a) = df(a)(v)$
4. Remarque : La réciproque est fausse
5. Exemple : Si $f(x,y) = \frac{y^2}{x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x)$ alors f admet des dérivées directionnelles en $(0,0)$ suivant tout vecteur mais n'est pas continue en 0 donc pas différentiable en 0
6. Définition : Si f admet une dérivée directionnelle en a suivant e_i alors on dit que f admet une i-ième dérivée partielle en a et on note $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \frac{\partial f}{\partial e_i}(a)$
7. Exemple : Si $f(x,y) = x^2y - 2sin(xy)$ alors f admet des dérivées partielles et $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy - 2ycos(xy)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 - 2xcox(xy)$
8. Proposition : Soit $a \in U$ et $f_1, ..., f_p$ les composantes de f, alors f admet une i-ième dérivée partielle si et seulement si les f_j aussi, dans ce cas $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(a), ..., \frac{\partial f_p}{\partial x_i}(a)\right)$
9. Exemple : Si $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto (2xy - e^{xy}, x^3 - 2xe^y)$ alors $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (2y - ye^{xy}, 3x^2 + 2e^y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (2x - xe^{xy}, 2xe^y)$
10. Théorème : Si f différentiable en $a \in U$ alors f admet des dérivées partielles et $df(a)(h) = \sum_{i=1}^{n} h_k \frac{\partial f}{\partial x_k}$
11. Remarque : La réciproque est fausse
12. Exemple : Si $f(x,y) = \frac{x^2y}{x^4+y^2} \mathbb{1}_{(\mathbb{R}^*)^2}(x,y)$ alors f admet des dérivées partielles en $(0,0)$ mais f n'est pas continue en $(0,0)$ donc pas différentiable en $(0,0)$

1.4 Jacobien et gradient

(Chapitres 3.3 et 3.4 de Calcul différentiel de Mohammed El Amrani)

1. Définition : Si f différentiable en a alors la matrice jacobienne de f en a est $J_f(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq n}$, de plus si $n = p$ alors son déterminant est appelé jacobien de f en a
2. Exemple : Si $f(x,y,z) = (xyz, x^2 + y^2 + 2z^2)$ alors $J_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} yz & xz & xy \\ 2x & 2y & 4z \end{pmatrix}$
3. Proposition : Si f différentiable en a alors $df(a)(h) = J_f(a)h$
4. Corollaire : Avec les notations adéquates $J_{\alpha f + \beta g}(a) = \alpha J_f(a) + \beta J_g(b)$ et $J_{g \circ f}(a) = J_g(f(a))J_f(a)$
5. Application : Soit $f : U \longrightarrow V$ différentiable en $a \in U$ et $g : V \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est différentiable en a et $\frac{\partial (g \circ f)}{\partial x_i}(a) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial y_k}(f(a)) \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(a)$

6. Exemple : Si $f : (r, \theta) \in]0, +\infty[= \times]0, 2\pi[=: U \longrightarrow (rcos(\theta), rsin(\theta))$ et $g : V \subset f(U) \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiable, alors $J_h(r, \theta) = r$, ce qui utile en calculs d'intégrales
7. Théorème de représentation de Riesz : Pour tout $\varphi \in (\mathbb{R}^n)^*$, il existe un unique $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\varphi(y) = \langle x, y \rangle$
8. Définition : Si $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiable en $a \in U$, alors $df(a) \in (\mathbb{R}^n)^*$ et l'unique vecteur du théorème précédent est appelé gradient de f en a et est noté $\nabla f(a)$
9. Proposition : Dans ce cas $\nabla f(a) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) e_k$ et $df(a)(h) = \langle \nabla f(a), h \rangle$
10. Exemple : Si $f(x, y, z) = x^3 - 2xy - z^3$ alors $\nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} x^3 - 2y \\ -2x \\ -3z^2 \end{pmatrix}$

2 Différentiabilité supérieure

2.1 Applications de classes C^1

(Chapitres 3.5 et 3.7 de Calcul différentiel de Mohammed El Amrani et 5.4.3 d'Analyse de Xavier Gourdon et Exercices 38 et 101 du Petit guide de calcul différentiel de François Rouvière)

1. Définition : On dit que f est de classe C^1 sur U si f est différentiable sur U et $df : U \longrightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ est continue (pour la norme subordonnée)
2. Théorème : f est de classe C^1 sur U si et seulement si f admet des dérivées partielles continues sur U
3. Proposition : Avec les notations adéquates, $\alpha f + \beta g$ et $g \circ f$ sont de classes C^1 sur U
4. Définition : On dit que $f : U \longrightarrow V$ est un C^1-difféomorphisme si f est de classe C^1 bijective et de bijection réciproque de classe C^1
5. Exemple : Si f linéaire bijective alors f est un C^1-difféomorphisme
6. Exemple : $f(x) = x^3$ sur $\mathbb{R}$ n'est pas un C^1-difféomorphisme car sa bijection réciproque n'est pas dérivable en 0
7. Proposition : Si $f : U \longrightarrow V$ est un C^1-difféomorphisme alors $d(f^{-1})(y) = (df(y))^{-1}$
8. Application : Théorème de changement de variable : Soit U mesurable compact de $\mathbb{R}^n$, φ un C^1-difféomorphisme de $\overset{\circ}{U}$ sur $\varphi\left(\overset{\circ}{U}\right)$ tel que $det(J_\varphi)$ se prolonge continûment sur U, alors $V = \varphi(U)$ est un compact mesurable et pour tout $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, $\int_V f(v)dv = \int_U f(\varphi(u))|det(J_\varphi(u))|du$
9. Exemple : Le passage en coordonnées polaires permet de calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$
10. Théorème : Si $f_k : U \longrightarrow \mathbb{R}^p$ de classe C^1, $f_k \underset{k \to +\infty}{\overset{CVS}{\longrightarrow}} f$ et $df_k(x) \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} L(x)$ dans $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ uniformément pour $x \in U$ alors f est de classe C^1 sur U et $df = L$

11. Application : L'application $exp : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow GL_n(K)$ est différentiable en 0 et $dexp(0) = id_{M_n(K)}$, de plus exp est différentiable sur $M_n(K)$ et $\forall A, H \in M_n(K), dexp(A)(H) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\sum_{\substack{0 \leq i,j \leq k-1 \\ i+j=k}} A^i H A^j \right)$

2.2 Différentielle seconde

(Chapitre 4.1 de Calcul différentiel de Mohammed El Amrani)

1. Définition : On dit que f est deux différentiable en $a \in U$ si f est différentiable sur un voisinage V de a et $df : V \longrightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ est différentiable en a
2. Remarque : Dans ce cas $d(df)(a)$ est la différentielle seconde de f en a, il s'agit d'une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$
3. Proposition : Il existe un isomorphisme canonique et isométrique entre $L(\mathbb{R}^n, L(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^m))$ et $L_2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, \mathbb{R}^m)$
4. Définition : Si f deux fois différentiable sur U alors la différentielle seconde est l'application $d^2f : a \in U \longmapsto d^2f(x) \in L_2(\mathbb{R}^{\times}\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ avec $d^2f(a)(h,k) = (d(df)(a)(h))(k)$
5. Exemple : Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^p$ alors f est deux fois différentiable si et seulement si f est deux fois dérivable, dans ce cas $d^2f(a)(h,k) = hkf''(a)$
6. Proposition : Si $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fois différentiable alors les dérivées partielles d'ordre deux de f sont définies et $d^2f(a)(h,k) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) h_i k_j$
7. Théorème de Schwarz : Si f deux fois différentiables alors $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$
8. Exemple : Si $f(x,y) = \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$ alors $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ (Contre-exemple 14.12 des Contre-exemples en mathématiques de Bertrand Hauchecorne)
9. Définition : Si $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ deux différentiable alors $H_f(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right)$ est la hessienne de f en a
10. Remarque : Dans ce cas $d^2f(a)(h,k) = {}^t h H_f(a) k$ et $H_f(a)$ est une matrice bilinéaire symétrique

2.3 Acroissements finis et formules de Taylor

(Chapitres 3.6 et 4.3 de Calcul différentiel de Mohammed El Amrani et Exercices 66 et 114 de Petit guide de calcul différentiel de François Rouvière)

1. Théorème des accroissements finis : Si U ouvert convexe et $f ; U \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiable, soit $a, b \in U$ distincts, alors il existe $c \in \,]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = df(c)(b-a)$
2. Corollaire : Inégalité des accroissements finis : Dans ce cas, si f de classe C^1 et $M = \underset{t \in \,]0,1[}{sup} \|df(a + t(b-a))\| < +\infty$ alors $\|f(b) - f(a)\| \leq M \|b - a\|$
3. Application : Dans ce cas si $df = 0$ alors f est constante sur U

4. Théorème : Formule de Taylor avec reste intégral : Si $[a, a+h] \subset U$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 alors $f(a+h) = f(a) + df(a)(h) + \int_0^1 (1-t) d^2 f(a+th)(h,h)dt$
5. Théorème : Formule de Taylor-Lagrange : Si $[a, a+h] \subset U$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 alors il existe $\theta \in]0,1[$ tel que $f(a+h) = f(a) + df(a)(h) + \frac{1}{2} d^2 f(a+\theta h)(h,h)$
6. Corollaire : Dans ce cas $f(a+th) = f(a) + \sum\limits_{k=1}^{n} h_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) + \frac{1}{2} \sum\limits_{1 \leq i,j \leq n} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a+\theta h)$
7. Théorème : Formule de Taylor-Young : Si $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^p$ de classe C^1 et deux fois différentiable alors $f(a+h) \underset{\|h\| \to 0}{=} f(a) + df(a)(h) + \frac{1}{2} d^2 f(a)(h,h) + o(\|h\|^2)$
8. Lemme : Réduction des formes quadratiques : Soit $A_0 \in S_n(R) \cap GL_n(\mathbb{R})$ et $\varphi(M) = {}^t M A_0 M$, alors $d\varphi(I_n)$ est surjective de noyau $\{H \in M_n(\mathbb{R}), A_0 H \in A_n(\mathbb{R})\}$ et il existe un voisinage V de A_0 dans $S_n(\mathbb{R})$ et une application $\psi(A) = M$ de V dans $GL_n(\mathbb{R})$ de classe C^1 telle que $\forall A \in V, A = {}^t M A_0 M$
9. Proposition : Lemme de Morse à n variables : Soit U ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant l'origine et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^3 tel que $df(0) = 0$ et $sign(H_f(0)) = (p, n-p)$, alors il existe un C^1-difféomorphisme $x \longmapsto u = \varphi(x)$ entre deux voisinages de l'origine dans $\mathbb{R}^n$ tel que $\varphi(0) = 0$ et $f(x) - f(0) = u_1^2 + ... + u_p^2 - u_{p+1}^2 - ... - u_n^2$

3 Fonctions implicites et inversion locale (pas la place)

3.1 Théorème des fonctions implicites

(Chapitre 6.2 de Calcul différentiel de Mohammed El Amrani)
On considère E, F des espaces vectoriels normés de dimension finie.

1. Remarque : Soit $f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$, alors au voisinage $(a,b) \neq (0,-1), (0,1)$, $f(x, \varphi(x)) = 0 \Longleftrightarrow \varphi(x) = \pm\sqrt{1-x^2}$ mais pas au voisinage de $(0,-1)$ et $(0,1)$
2. Théorème des fonctions implicites : Soit Ω ouvert de $E \times F$ et $f : \Omega \longrightarrow F$ de classe C^1 tel qu'il existe $(x_0, y_0) \in \Omega$ tel que $f(x_0, y_0) = 0$ et $d(f(x_0, .))(y_0) \in GL(F)$ alors il existe $U \in \mathcal{V}(x_0), V \in \mathcal{V}(y_0)$ et $\varphi : U \longrightarrow V$ de classe C^1 tel que $[(x,y) \in U \times V, f(x,y) = 0] \Longleftrightarrow [x \in U, y = \varphi(x)]$
3. Corollaire : Dans ce cas, $d\varphi(x) = -(d(f(x,.))(\varphi(x)))^{-1} \circ d(f(., \varphi(x)))(x)$
4. Exemple : Dans le cas du cercle, $d(f(x_0, \cdot))(y_0)(h) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) h = 2 y_0 h$, d'où $d(f(x_0, \cdot))(y_0)$ est un isomorphisme si et seulement si $y_0 \neq 0$
5. Définition : Dans ce cas, φ est appelée la fonction implicite de f au voisinage de (x_0, y_0)
6. Remarque : Si de plus f est de classe C^k alors il existe φ de classe C^k
7. Théorème : Soit Ω ouvert de $\mathbb{R}^{n+1}$ et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 tel qu'il existe $(a_1, ..., a_n, b) \in \Omega$ tel que $f(a_1, ..., a_n, b) = 0$ et $\frac{\partial y}{\partial f}(a_1, ..., a_n, b) \neq 0$, alors il existe $U \in \mathcal{V}(x_0), V \in \mathcal{V}(y_0)$ et $\varphi : U \longrightarrow V$ de classe C^1 tel que $[(x,y) \in U \times V, f(x,y) = 0] \Longleftrightarrow [x \in U, y = \varphi(x)]$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x_1, ..., x_n) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x))}$
8. Exemple : Si $E = F = \mathbb{R}$ alors $f(x,y) = 0$ est l'équation implicite d'une courbe, cela peut s'écrire $y = \varphi(x)$ au voisinage d'un point (a,b) tel que $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \neq 0$

9. Remarque : $d(f(x_0,.))(y_0) \in GL(F)$ est une condition suffisante mais non nécessaire
10. Exemple : $f(x,y) = x - y^3$ avec $\varphi(x) = \sqrt[3]{x}$ non C^1 en 0
11. Remarque : Si $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ alors la condition revient à dire que la tangente n'est pas verticale

3.2 Inversions locale et globales

(Chapitre 6.4 de Calcul différentiel de Mohammed El Amrani)

1. Définition : Soit U ouvert de E, V ouvert de F et $f : U \longrightarrow V$, alors on dit que f est un C^k-difféomorphisme si f est bijective, de classe C^k et de bijection réciproque de classe C^k
2. Remarque : Si $fU \longrightarrow V$ est un C^1-difféomorphimse alors $df(x) : E \longrightarrow F$ est un isomorphisme et $df(x)^{-1} = d(f^{-1})(f(x))$
3. Théorème d'inversion locale : Soit Ω ouvert de E et $f : \Omega \longrightarrow F$ de classe C^k tel qu'il existe $x_0 \in U$ tel que $df(x_0) : E \longrightarrow F$ isomorphisme, alors il existe $U \in \mathcal{V}(x_0)$ et $V \in \mathcal{V}(f(x_0))$ tel que $f : U \longrightarrow V$ soit un C^k-difféomorphisme
4. Corollaire : Dans ce cas, $d(f^{-1})(y) = (df(f^{-1}(y)))^{-1}$
5. Remarque : Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ alors $df(x) \in GL(\mathbb{R}^n) \Longleftrightarrow Jac(f)(x) \neq 0$
6. Théorème d'inversion globale : Soit U ouvert de E et $f : U \longrightarrow F$ de classe C^k injective et pour tout $x \in U$, $df(x) : E \longrightarrow F$ est un isomorphisme, alors $f(U)$ est un ouvert de F et f est un C^k-difféomorphisme de U dans $f(U)$
7. Exemple : Si $f(r,\theta) = (rcos(\theta), rsin(\theta))$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ alors f est un C^1-difféomorphisme et $f^{-1}(x,y) = \left(\sqrt{x^2+y^2}, arctan\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right)$
8. Corollaire : Soit I intervalle ouvert réel et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^k tel que f' ne s'annule pas sur I alors $f(I)$ est un intervalle ouvert réel et f est un C^k-difféomorphisme de I sur $f(I)$
9. Exemple : $exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ est un C^∞-difféomorphisme et $ln : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ également
10. Remarque : Il existe f C^1-difféomorphisme local au voisinage de tout point mais pas un C^1-difféomorphisme global
11. Exemple : $f(x,y) = (x^3 - y^2, 2xy)$ (Exemple 14.11 des Contre-exemples en mathématiques de Bertrand Hauchecorne)

4 Etude d'extrema

4.1 Conditions du premier ordre

(Chapitres 5.1 de Calcul différentiel de Mohammed El Amrani et 9.1 des Eléments d'analyse réelle de Jean-Etienne Rombaldi)

On considère U ouvert de E de Banach.

1. Définition : Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiable et $a \in U$, alors on dit que a est un point critique de f si $df(a) = 0$
2. Proposition : Si f différentiable en a extremum local alors $df(a) = 0$
3. Remarque : La réciproque est fausse, $f(x) = x^3$ en 0
4. Remarque : Il ne faut pas oublier de regarder les points où f n'est pas différentiable
5. Exemple : $f(x) = \|x\|$ admet un minimum global en 0 mais n'y est pas différentiable
6. Théorème de Rolle : Soit K compact de E et $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiable sur $\overset{\circ}{K}$, constante sur ∂K, alors il existe $a \in \overset{\circ}{K}$ tel que $df(a) = 0$
7. Théorème : Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, dérivable sur $]a,b[$ tel que $f(a) = f(b)$ alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c)$
8. Remarque : Dans ce cas f admet un extremum local en c

4.2 Conditions du second ordre

(Chapitres 5.1 de Calcul différentiel de Mohammed El Amrani)
On considère $f : U \subset E \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fois différentiables et $a \in U$.

1. Proposition : Si f admet un minimum (respectivement maximum) local en a alors $df(a) = 0$ et $\forall h \in E, d^2f(a)(h,h) \geq 0$ (respectivement $\leq$)
2. Remarque : $\forall h \in E, d^2f(a)(h,h) = H(f)(a)(h,h) = \sum\limits_{1 \leq i,j \leq n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) h_i h_j$, forme quadratique définie par la matrice symétrique $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right)_{1 \leq i,j \leq n}$
3. Définition : On dit que a est un point critique non dégénéré si la forme quadratique hessienne $h \longmapsto d^2f(a)(h,h)$ est non dégénérée
4. Théorème : Si a point critique de f alors :
   - Si $q = d^2f(a)$ forme coercive positive (ie il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $q(h) \geq \varepsilon \|h\|^2$ alors f admet un minimum local strict en a (en dimension finie il suffit que q soit définie positive)
   - Si $q = d^2f(a)$ forme coercive négative (ie il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $q(h) \leq -\varepsilon \|h\|^2$ alors f admet un maximum local strict en a (en dimension finie il suffit que q soit définie négative)
5. Remarque : Si la forme quadratique q est dégénérée alors il y a ambiguïté
6. Exemple : Si $f(x,y) = x^2 + \lambda y^4$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $(0,0)$ est un minimum local si $\lambda \geq 0$ et un col si $\lambda < 0$
7. Théorème : Soit $A \in S_p^{++}(\mathbb{R}), b \in \mathbb{R}^p$, $f(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle$ et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $x_{n+1} = x_n - \rho_n \nabla f(x_n)$ avec $\forall n \in \mathbb{N}, \rho_n = \underset{\rho \in \mathbb{R}_+^*}{argmin}(f(x_n - \rho \nabla f(x_n))$, alors $x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} x_*$ avec $x_* \in \mathbb{R}^p$ unique minimum global de f
8. Application : On peut donc approcher numériquement la solution $x \in \mathbb{R}^p$ de $Ax = b$

4.3 Extrema sous contraintes (pas la place)

(Chapitre 6.3 de Calcul différentiel de Mohammed El Amrani)

1. Théorème des multiplicateurs de Lagrange (une seule contrainte) : Soit U ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f, g : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 et $\Gamma = g^{-1}(\{0\})$ tels que $f_{|\Gamma}$ admette un extremum local en $a \in \Gamma$ tel que $\nabla g(a) \neq 0$, alors il existe un unique $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\nabla(f + \lambda g)(a) = 0$
2. Définition : λ est appelé multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte $g = 0$
3. Exemple : Le minimum et le maximum de $f(x, y) = x + y$ restreinte à $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^4 + y^4 = 1\}$ sont atteints en $(-2^{-\frac{1}{4}}, -2^{-\frac{1}{4}})$ et $(2^{-\frac{1}{4}}, 2^{-\frac{1}{4}})$
4. Théorème des multiplicateurs de Lagrange (plusieurs contraintes) : Soit U ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : U \longrightarrow \mathbb{R}^p$ de classe C^1 et $\Gamma = g^{-1}(\{0\})$ tels que $f_{|\Gamma}$ admette un extremum local en $a \in \Gamma$ tel que $dg(a)$ soit surjective, alors il existe un unique $(\lambda_1, ..., \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que $\nabla \left(f + \sum\limits_{i=1}^{p} \lambda_i g_i \right)(a) = 0$
5. Remarque : $dg(a)$ surjective revient à supposer $dg_1(a), ..., dg_p(a)$ linéairement indépendants
6. Exemple : Si $f(x, y, z) = x + y$ et $g(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2, z - y)$ alors f admet un unique maximum et un unique minimum atteints en $\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$ et $\left(\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$
7. Exemple : Mise en boîte à peu de frais : A volume fixé, le parallélépipède de surface minimale est le cube (Exercice 128 du Petit guide de calcul différentiel de François Rouvière)