Leçon 219 Extrema, existence, caractérisations, recherche, exemples et applications

Dorian Cacitti-Holland

2020-2021

Références.

1. Analyse de Xavier Gourdon
2. Objectif agrégation
3. Calcul différentiel de Mohammed El Amrani
4. Cours d'analyse fonctionnel de Daniel Li
5. Analyse complexe d'Amar et Matheron
6. Eléments d'analyse réelle de Jean-Etienne Rombaldi
7. Petit guide de calcul différentiel de François Rouvière
8. Analyse numérique et équations différentielles de Jean-Pierre Demailly
9. Oraux X-ENS Analyse 4
10. Analyse matricielle de Jean-Etienne Rombaldi
11. Algèbre linéaire de Joseph Grifone

Développements.

1. Théorème de projection sur un convexe fermé non vide
2. Minimisation de fonctionnelle quadratique

Table des matières

1 Existence et unicité d'extrema

1.1 Fonctions continues sur un compact et fonctions coercives

(Chapitres 1.3 d'Analyse de Xavier Gourdon et 1.6 d'Objectif agrégation, 5.1 de Calcul différentiel de Mohammed El Amrani)

On considère U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in U$.

1. Définition : On dit que f admet un maximum (respectivement minimum) local en a s'il existe $V \in \mathcal{V}(a)$ tel que $\forall x \in V, f(x) \leq f(a)$ (respectivement $\geq$), et on dit que f admet un extremum local en a si f admet un maximum ou un minimum local en a
2. Défintion : On dit que f admet un maximum (respectivement minimum) global en a si $\forall x \in U, f(x) \leq f(a)$ (respectivement $\geq$), et on dit que f admet un extremum global si f admet un maximum ou un minimum global en f
3. Remarque : Un extremum global est local, mais pas l'inverse en général, $x \longmapsto x^3 - x$ admet un minimum local et un maximum local mais pas d'extrema globaux
4. Théorème : Une fonction continue sur un compact est bornée et atteint ses bornes
5. Application : Soit K_1 et K_2 deux compacts de $\mathbb{R}^n$, alors il existe $(x_1, x_2) \in K^2$ tel que $d(x_1, x_2) = d(K_1, K_2)$ (Exercice 1.3.3 d'Analyse de Xavier Gourdon)
6. Application : Soit E compact et $f : E \longrightarrow E$ tel que $\forall (x, y) \in E^2, x \neq y \Rightarrow d(f(x), f(y)) < d(x, y)$, alors f admet un unique point fixe (Exercice 1.3.4 d'Analyse de Xavier Gourdon)
7. Définition : On dit que $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est coercive si $f(x) \underset{\|x\| \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$
8. Exemple : $f(y) = \|x - y\|$ est coercive par inégalité triangulaire
9. Proposition : Soit F fermé de E, si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ coercive alors f est minorée sur F et atteint son minimum
10. Application : Si F sous-espace de dimension finie de E alors $d(x, F)$ est atteint

1.2 Fonctions et parties convexes

(Chapitres 5.3 de Calcul différentiel de Mohammed El Amrani, II.2 du Cours d'analyse fonctionnelle de Daniel Li et 3.1.3 d'Objectif agrégation)

1. Définition : Soit $A \subset E$ avec E espace vectoriel, alors on dit que A est convexe si $\forall (x, y) \in A^2, [x, y] \subset A$
2. Exemple : Si A est un sous-espace vectoriel alors A est une partie convexe
3. Définition : Soit A convexe de E et $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, alors on dit que f est convexe (respectivement strictement convexe) si $\forall (x, y) \in A^2, \forall t \in [0, 1], f((1 - t)x + ty) \leq (1 - t)f(x) + tf(y)$ (respecitivement $<$ si $x \neq y$ et $t \in]0, 1[$)
4. Exemple : Une norme est convexe par inégalité triangulaire
5. Théorème : Si $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ strictement convexe avec A convexe alors il existe au plus un point de A minimisant f sur A

6. Théorème de projection sur un convexe fermé : Soit H de Hilbert, C convexe fermé non vide de H, alors, pour tout $x \in H$, il existe un unique $p_C(x) \in C$ tel que $d(x, C) = \|x - p_C(x)\|$, de plus on a la caratérisation, pour $y \in H$, $y = p_C(x)$ si et seulement si $y \in C, \forall z \in C, Re(\langle x - y, z - y\rangle) \leq 0$
7. Application : Théorème de représentation de Riesz : Soit H de Hilbert et $\phi \in H^*$, alors il existe un unique $y \in H$ tel que $\forall x \in H, \phi(x) = \langle y, x\rangle$
8. Corollaire : Dans ce cas, soit $\psi(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2 - Re(\varphi(x))$, alors ψ admet un minimum qu'elle atteint en un unique poitn $y \in H$
9. Théorème de Lax-Milgram : Soit H de Hilbert, B forme bilinéaire continue coercive (ie il existe $a \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall x \in H, B(x, x) \geq \alpha \|x\|^2$) et $L \in H^*$, alors il existe un unique $u \in H$ tel que $\forall y \in H, L(y) = B(u, y)$ (Exercice II.5.14 du Cours d'analyse fonctionnelle de Daniel Li)
10. Corollaire : Dans ce cas, si B est symétrique et $J(x) = B(x, x) - 2L(x)$ alors u est caractérisé par $J(u) = \underset{x \in H}{min}(J(x))$ (Exercice II.5.14 du Cours d'analyse fonctionnelle de Daniel Li)

1.3 Pour les fonctions à valeurs complexes

(Chapitres 4.8 d'Analyse complexe d'Amar et Matheron et 7.3 d'Analyse complexe de Patrice Tauvel)

On considère Ω ouvert de $\mathbb{C}$ et $u \in C(\Omega)$.

1. Définition : On dit que u vérifie la propriété de la moyenne (respectivement de la sous-moyenne) dans Ω si $\forall \overline{D}(z_0, r) \subset \Omega, u(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{it})dt$ (respectiement $\leq$)
2. Exemple : Si u holomorphe alors u vérifie la propriété de la moyenne
3. Remarque : Si u vérfie la propriété de la moyenne alors $Re(u)$ et $Im(U)$ également et $|u|$ la sous-moyenne
4. Proposition : Si Ω connexe et u vérfiant la propriété de la moyenne et admettant un maximum global alors u constante
5. Corollaire : Si Ω connexe et u holomorphe tel que $|u|$ admette un maximum local alors u constante
6. Corollaire : Si Ω connexe et u holomorphe non constante admettant un minimum local alors ce minimum est nul, en particulier u s'annule au moins une fois
7. Théorème : Principe du maximum : Si Ω borné, $u \in C(\overline{\Omega})$ vérifiant la propriété de la sous-moyenne alors $\forall z_0 \in \Omega, u(z_0) \leq \underset{z \in \partial\Omega}{sup}|u(z)|$ avec inégalté stricte si Ω connexe et u non constant
8. Corollaire : Si Ω borné et $u \in C(\overline{\Omega}) \cap H(\Omega)$ alors $\forall z_0 \in \Omega, |u(z_0)| \leq \underset{z \in \partial\Omega}{sup}|u(z)|$ avec inégalité stricte si Ω connexe et u non constante
9. Application : Lemme de Schwarz : Soit $f \in H(D(0, 1)$ tel que $f(0) = 0$ et $|f| < 1$, alors $\forall z \in D(0, 1), |f(z)| \leq |z|$, $|f'(0)| \leq 1$ et s'il y a égalité alors $f = \lambda id$ avec $|\lambda| = 1$

10. Exemple : Les automorphismes de $D(0,1)$ sont exactement de la forme $z \longmapsto \lambda \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ avec $|\lambda| = 1$ et $a \in D(0,1)$

2 Lien avec le calcul différentiel

2.1 Conditions du premier ordre

(Chapitres 5.1 de Calcul différentiel de Mohammed El Amrani et 9.1 des Eléments d'analyse réelle de Jean-Etienne Rombaldi)

On considère U ouvert de E de Banach.

1. Définition : Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiable et $a \in U$, alors on dit que a est un point critique de f si $df(a) = 0$
2. Proposition : Si f différentiable en a extremum local alors $df(a) = 0$
3. Remarque : La réciproque est fausse, $f(x) = x^3$ en 0
4. Remarque : Il ne faut pas oublier de regarder les points où f n'est pas différentiable
5. Exemple : $f(x) = \|x\|$ admet un minimum global en 0 mais n'y est pas différentiable
6. Théorème de Rolle : Soit K compact de E et $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiable sur $\mathring{K}$, constante sur ∂K, alors il existe $a \in \mathring{K}$ tel que $df(a) = 0$
7. Théorème : Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, dérivable sur $]a,b[$ tel que $f(a) = f(b)$ alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c)$
8. Remarque : Dans ce cas f admet un extremum local en c

2.2 Conditions du second ordre

(Chapitres 5.1 de Calcul différentiel de Mohammed El Amrani)

On considère $f : U \subset E \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fois différentiables et $a \in U$.

1. Proposition : Si f admet un minimum (respectivement maximum) local en a alors $df(a) = 0$ et $\forall h \in E, d^2f(a)(h,h) \geq 0$ (respectivement $\leq$)
2. Remarque : $\forall h \in E, d^2f(a)(h,h) = H(f)(a)(h,h) = \sum\limits_{1 \leq i,j \leq n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) h_i h_j$, forme quadratique définie par la matrice symétrique $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right)_{1 \leq i,j \leq n}$
3. Définition : On dit que a est un point critique non dégénéré si la forme quadratique hessienne $h \longmapsto d^2f(a)(h,h)$ est non dégénérée
4. Théorème : Si a point critique de f alors :
   - Si $q = d^2f(a)$ forme coercive positive (ie il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $q(h) \geq \varepsilon \|h\|^2$) alors f admet un minimum local strict en a (en dimension finie il suffit que q soit définie positive)
   - Si $q = d^2f(a)$ forme coercive négative (ie il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $q(h) \leq -\varepsilon \|h\|^2$) alors f admet un maximum local strict en a (en dimension finie il suffit que q soit définie négative)

5. Remarque : Si la forme quadratique q est dégénérée alors il y a ambiguïté
6. Exemple : Si $f(x,y) = x^2 + \lambda y^4$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $(0,0)$ est un minimum local si $\lambda \geq 0$ et un col si $\lambda < 0$

2.3 Extrema sous contraintes

(Chapitre 6.3 du Calcul différentiel de Mohammed El Amrani)
On considère U ouvert de $\mathbb{R}^n$.

1. Théorème des multiplicateurs de Lagrange (sous une contrainte) : Soit $(f,g) \in C^1(U,\mathbb{R})^2$ et $\Gamma = g^{-1}(\{0\})$ tels que $f_{|\Gamma}$ admette un extremum local en $a \in \Gamma$ tel que $dg(a) \neq 0$, alors il existe un unique $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $d(f + \lambda g)(a) = 0$
2. Remarque : λ est appelé multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte $g = 0$
3. Exemple : Si $f(x,y) = x + y$ et $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^4 + y^4 = 1\}$ alors $f_{|\Gamma}$ admet un minimum en $(-2^{-\frac{1}{4}}, -2^{-\frac{1}{4}})$ et un maximum en $(-2^{\frac{1}{4}}, 2^{-\frac{1}{4}})$
4. Théorème des multiplicateurs de Lagrange (sous plusieurs contraintes) : Soit $(f,g) \in C^1(U,\mathbb{R}) \times C^1(I,\mathbb{R}^p)$ et $\Gamma = g^{-1}(\{0\})$ tels que $f_{|\Gamma}$ admette un extremum local en $a \in \Gamma$ et $dg(a)$ soit surjective, alors il existe $\lambda_1, ..., \lambda_p \in \mathbb{R}$ uniques tels que $d\left(f + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i g_i\right)(a) = 0$
5. Exemple : Si $f(x,y,z) = x + z$ et $g(x,y,z) = (x^2 + y^2 + z^2 - 1, z - y)$ alors $f_{|\Gamma}$ admet un minimum global en $\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$ et un maximum globale en $\left(\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$
6. Théorème : Si U convexe, soit $(f,g) \in C(U,\mathbb{R}) \times C(I,\mathbb{R}^p)$ et $\Gamma = g^{-1}(\{0\})$ tels qu'il existe $a \in \Gamma$ et $\lambda_1, ..., \lambda_p \in \mathbb{R}$ uniques tels que f et g différentiables en a, $f + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i g_i$ convexe et $d\left(f + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i g_i\right)(a) = 0$, alors $f_{|\Gamma}$ admet un minimum global en a
7. Remarque : Dans ce cas les hypothèses sur g sont plus faibles car le résultat ne repose pas sur le théorème des fonctions implicites

3 Recherche numérique

3.1 Méthode de Newton

(Chapitres 4.49 du Petit guide de calcul différentiel de François Rouvière et IV.2.4 et IV.3.3 d'Analyse numérique et équations différentielles de Jean-Pierre Demailly)
On considère $f : [c,d] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 avec $f(c) < 0 < f(d)$ et $f' > 0$.

1. Lemme : f admet un admet un unique point fixe $a \in]c,d[$ et pour tout $x \in [c,d]$, il existe $z \in [a,x]$ tel que $F(x) - a := x - \frac{f(x)}{f'(x)} - a = \frac{1}{2}\frac{f''(z)}{f'(x)}(x-a)^2$
2. Lemme : Il existe $C \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall x \in [c,d], |F(x) - a| \leq C|x-a|^2$ et il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $I = [a - \alpha, a + \alpha]$ soit stable par F

3. Théorème : Méthode de Newton : Soit $x_0 \in I$, alors $x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} a$ avec $x_{n+1} = F(x_n)$
4. Corollaire : Si $f'' > 0$ alors $I = [a, d]$ est stable par F et pour tout $x_0 \in I$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante (ou constante) avec $0 \leq x_{n+1} - a \leq C(x_n - a)^2$ et $x_{n+1} - a \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2}\frac{f''(a)}{f'(a)}(x_n - a)^2$
5. Application : Soit $y \in \mathbb{R}_+^*$ et $f(x) = x^2 - y$, alors la méthode de Newton permet d'approcher $\sqrt{y}$
6. Théorème : Méthode de Newton-Raphson : Soit U ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^2 et $a \in U$ tel que $f(a) = 0$ et $df : U \longrightarrow GL(\mathbb{R}^n)$, alors a est un point fixe attractif que l'on peut approcher par la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_{n+1} = u_n - df(u_n)^{-1}(f(u_n))$
7. Exemple : On peut approcher la solution (x, y) de $\left\{ \begin{array}{rcl} x^2 + xy - 2y^2 & = & 4 \\ xe^x + ye^y & = & 0 \end{array} \right.$

3.2 Minimisation de fonctionnelle quadratique

(Chapitre 5.15 d'Analyse matricielle de Jean-Etienne Rombaldi)
On considère $A \in S_p^{++}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^p$.

1. Théorème : Soit U ouvert de $\mathbb{R}^p$ et $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiable en $x_0 \in U$ tel que φ admette un extremum local en x_0, alors $d\varphi(x_0) = 0$
2. Définition : La fonctionnelle quadratique associée à A et b est $\varphi(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle$
3. Lemme : La fonctionnelle quadratique précédente φ est différentiable sur $\mathbb{R}^p$ et $\nabla\varphi(x) = Ax - b$
4. Théorème : La solution de $Ax = b$ réalise le minimum global de la fonctionnelle φ
5. Lemme : Soit $\alpha = inf(Sp(A)) \in \mathbb{R}_+^*$, alors $\forall x \in \mathbb{R}^p, \langle Ax, x\rangle \geq \alpha \|x\|^2$
6. Proposition : La fonctionnelle quadratique précédente φ est différentiable sur $\mathbb{R}^n$ et $\nabla f(x) = Ax - b$
7. Corollaire : Pour tout $x \in \mathbb{R}^p$, $H_f(x) = A \in S_p^{++}(\mathbb{R})$, donc f est strictement convexe
8. Propositon : f est coercive, ie $f(x) \underset{\|x\| \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$
9. Théorème : La solution de $Ax = b$ réalise l'unique minimum global de la fonctionnelle φ
10. Théorème : Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $x_{n+1} = x_n - \rho_n \nabla f(x_n)$ avec $\forall n \in \mathbb{N}, \rho_n = \underset{\rho\in\mathbb{R}_+^*}{argmin}(f(x_n - \rho\nabla f(x_n))$, alors $x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} x_*$ avec $x_* \in \mathbb{R}^p$ unique minimum global de f
11. Application : On peut donc approcher numériquement la solution $x \in \mathbb{R}^p$ de $Ax = b$

3.3 Méthode des moindres carrés

(Exercice 7.23 d'Algèbre linéaire de Joseph Grifone)
On considère E et F deux espaces euclidiens et $f \in L(E, F)$.

1. Proposition : Il existe un unique $f^* \in L(F, E)$ tel que $\forall (x, y) \in E \times F, \langle f(x), y\rangle = \langle x, f^*(y)\rangle$

2. Lemme : Si $q = dim(E) \leq dim(F) = n$ et f injective alors $det(f^* \circ f) \neq 0$
3. Proposition : Spot $p : F \longrightarrow F$ la projection orthogonale sur $Im(f)$, alors $p = f \circ (f^* \circ f)^{-1}$
4. Définition : $f^- := (f^* \circ f)^{-1} \circ f^*$ est appelé l'inverse généralisé de f
5. Exemple : $A := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^- = \frac{1}{50} \begin{pmatrix} 18 & 15 & -1 \\ 2 & -10 & 14 \end{pmatrix}$
6. Remarque : $f^- \circ f = id_E, f \circ f^- = p$ et si f bijective alors $f^- = f^{-1}$
7. Définition : Soit $b \in F$, si f injective alors on appelle solution des moindres carrés de $f(x) = b$ le vecteur $x_0 \in E$ tel que $\|f(x_0) - b\| = \underset{x \in E}{inf} \|f(x) - b\|$
8. Théorème : La solution des moindres carrés de $f(x) = b$ est donnée par $x_0 = f^-(b)$
9. Exemple : La solution des moindres carrés de $Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ a \end{pmatrix}$ est $x_0 = \frac{1}{50} \begin{pmatrix} 48 - a \\ -22 + 14a \end{pmatrix}$