Leçon 222 Exemples d'équations aux dérivées partielles linéaires

Dorian Cacitti-Holland

2020-2021

Références.

1. Distributions, analyse de Fourier, équations aux dérivées partielles de François Golse
2. Equations différentielles de Florent Berthelin
3. Analyse de Queffélec et Zuily
4. Equations aux dérivées partielles de David et Gosselet
5. Petit guide de calcul différentiel de François Rouvière
6. Calcul différentiel de Mohammed El Amrani

Développements.

1. Résolution de l'équation des ondes dans $S(\mathbb{R})$
2. Résolution d'une équation aux dérivées partielles par changement de coordonnées

Table des matières

1 Equations aux dérivées partielles d'ordre 1

1.1 Equation de transport

(Chapitre 2.1 de Distributions de François Golse)

1. Définition : L'équation de transport est $\frac{\partial f}{\partial t} + \langle v, \nabla_x f \rangle = 0$ d'inconnue $f \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N)$ et de paramètre $v \in \mathbb{R}^N$
2. Proposition : Soit $y \in \mathbb{R}^N$, alors $\gamma : t \in \mathbb{R} \longmapsto y + tv$ est de classe C^1 et $\frac{d\gamma}{dt}(t) = v$, de plus $\{\gamma(t), t \in \mathbb{R}\}$ est appelé courbe caractéristique de y pour l'opérateur de transport $\frac{\partial}{\partial t} + \langle v, \nabla_x \rangle$
3. Corollaire : Toute solution de l'équation de transport reste constante le long de chaque courbe caractéristique
4. Théorème : Soit $f_0 \in C^1(\mathbb{R}^N)$, alors le problème de Cauchy $\forall x \in \mathbb{R}^N, \forall t \in \mathbb{R}_+^*, \frac{\partial f}{\partial t}(t,x) + \langle v, \nabla_x f(t,x) \rangle = 0, f(0,x) = f_0(x)$ admet une unique solution $f \in C^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N)$ donnée par $f(t,x) = f_0(x - tv)$
5. Remarque : Même si f_0 n'est pas dérivable la solution garde un sens
6. Exemple : Si $f_0(x) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$ alors $f(t,x) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x - tv) = \mathbb{1}_{[tv,+\infty[}(x)$

1.2 Cas des coefficents variables

(Chapitres 2.2 de Distributions de Golse et 12.5.4 de Equations différentielles de Florent Berthelin)

1. Définition : Dans ce cas l'équation de transport est de la forme $\frac{\partial f}{\partial t} + \langle V, \nabla_x f \rangle = 0$ avec $V : [0,T] \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ champ de vecteurs continue admettant des dérivées partielles d'ordre 1 et tel que $\nabla_x V$ soit continue et qu'il existe $k \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $|V(t,x)| \leq k(1+|x|)$
2. Proposition : Soit $x \in \mathbb{R}^N, t \in [0,T]$, alors il existe localement une unique solution γ de $\gamma'(s) = V(s, \gamma(s))$ tel que $\gamma(t) = x$, appelé courbe intégrale de V, de plus $s \longmapsto (s, \gamma(s))$ est appelé courbe caractéristique de l'opérateur $\frac{\partial}{\partial t} + \langle V(t,x), \nabla_x \rangle$ passant par x à l'instant t
3. Proposition : Soit $t \in [0,T], x \in \mathbb{R}^N$, alors la courbe intégrale γ de V passant par x à l'instant t est définie pour tout $s \in [0,T]$, on note $X(\cdot, t, x)$ cette courbe intégrale, ie la solution de $\frac{\partial X}{\partial s}(s,t,x) = V(s, X(s,t,x)), X(t,t,x) = x$
4. Corollaire : L'application $X : [0,T] \times [0,T] \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ est appelée flot caractéristique de $\frac{\partial}{\partial t} + \langle V, \nabla_x \rangle$ et vérifie :
   - Pour tous $t_1, t_2, t_3 \in [0,T], x \in \mathbb{R}^N$, $X(t_3, t_2, X(t_2, t_1, x)) = X(t_3, t_1, x)$
   - $\frac{\partial^2 X}{\partial s \partial x_j}(s,t,x)$ et $\frac{\partial^2 X}{\partial x_j \partial s}(s,t,x)$ existent pour tout $(s,t,x) \in]0,T[^2 \times \mathbb{R}^N$ et se prolongent continûment sur $[0,T]^2 \times \mathbb{R}^N$ et $\frac{\partial^2 X}{\partial s \partial x_j} = \frac{\partial^2 X}{\partial x_j \partial s}$
   - Pour tout $s,t \in [0,T]$, $X(s,t,\cdot)$ est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^N$
   - $X \in C^1([0,T]^2 \times \mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$
5. Remarque : L'hypothèse $|V(t,x)| \leq k(1+|x|)$ sert à définir le flot X de façon globale
6. Exemple : Si $N = 1$ et $V(t,x) = x^2$ alors V ne vérifie pas l'hypothèse précédente et $X(s,t,x)$ n'est définie que pour $s < t + \frac{1}{x}$ si $x > 0$ et que pour $s > t - \frac{1}{x}$ si $x < 0$

7. Théorème : Le problème de Cauchy $\forall t \in]0,T[, x \in \mathbb{R}^N, \frac{\partial f}{\partial t}(t,x) + \langle V(t,x), \nabla_x f(t,x)\rangle = 0, f(0,x) = f_0(x)$ admet une unique solution $f \in C^1([0,T] \times \mathbb{R}^N)$ définie par $f(t,x) = f_0(X(0,t,x))$
8. Exemple : La solution du problème de Cauchy $\frac{\partial f}{\partial t} + x\frac{\partial f}{\partial x} = 0, f(0,x) = f_0(x)$ est donnée par $f(x,t) = f_0(xe^{-t})$
9. Exemple : La solution du problème de Cauchy $\forall t \in \mathbb{R}_+^*, x \in \mathbb{R}^N, \frac{\partial f}{\partial t}(t,x) + a\frac{\partial f}{\partial x}(t,x) = f(t,x), f(0,x) = f_0(x)$ où $a \in \mathbb{R}$ est donnée par $f(t,x) = f_0(x - at)e^t$

2 Utilisation des séries de Fourier

2.1 Définition et propriétés

(Chapitre IV d'Analyse de Queffélec et Zuily)

1. Définition : Soit $f \in L^1_{2\pi}$, alors $c_n(f) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt = \langle f, e_n\rangle$
2. Proposition : Soit $f \in L^2_{2\pi}, a \in \mathbb{R}, (k,n) \in \mathbb{Z}^2$, alors :
   — $c_n(f \circ (-id_{\mathbb{R}})) = c_{-n}(f)$
   — $c_n(\overline{f}) = \overline{c_{-n}(f)}$
   — $c_n(\tau_a(f)) = e^{ina}c_n(f)$
   — $c_n(e_k f) = c_{n-k}(f)$
   — $f * e_n = c_n(f)e_n$
   — Si $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ et C^1 par morceaux alors $c_n(f') = inc_n(f)$
3. Exemple : Soit $\varepsilon \in]0,\pi[$ et $\sigma_\varepsilon \in L^\infty_{2\pi}$ tel que $\sigma_\varepsilon(t) = 1$ sur $[-\varepsilon,\varepsilon]$ et $\sigma_\varepsilon(t) = 0$ sur $[-\pi,\pi]\backslash[-\varepsilon,\varepsilon]$, alors $c_n(f_\varepsilon) = \frac{sin(n\varepsilon)}{n\pi}$ si $n \neq 0$ et $c_0(\sigma_\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{\pi}$, donc $S_N(\sigma_\varepsilon, t) = \frac{\varepsilon}{\pi} + 2\sum\limits_{n=1}^{N}\frac{sin(n\pi\varepsilon)}{n\pi}cos(nt)$
4. Définition : Soit $f \in L^1_{2\pi}$, alors la somme de Féjer de f est $\sigma_N(f) = \frac{1}{N}\sum\limits_{n=0}^{N-1}S_n(f)$
5. Théorème de convergence de Féjer :
   — Soit $f \in C_{2\pi}$, alors $\forall N \in \mathbb{N}^*, \|\sigma_N(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ et $\sigma_N(f) \xrightarrow[N\to+\infty]{CVU} f$
   — Soit $f \in L^p_{2\pi}$, alors $\forall N \in \mathbb{N}^*, \|\sigma_N(f)\|_p \leq \|f\|_p$ et $\sigma_N(f) \xrightarrow[N\to+\infty]{\|\cdot\|_p} f$
6. Corollaire : Soit $f \in C_{2\pi}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $S_N(f)(x_0) \xrightarrow[N\to+\infty]{} l \in \mathbb{C}$, alors $f(x_0) = l$ et si $S_N(f) \xrightarrow[N\to+\infty]{CVU} f$, alors $f = \sum\limits_{-\infty}^{+\infty}c_n(f)e_n := \lim\limits_{N\to+\infty}\sum\limits_{n=-N}^{N}c_n(f)e_n$
7. Proposition : Soit $f \in C_{2\pi}$ de classe C^1 par morceaux, alors $(S_N(f))_{N\in\mathbb{N}}$ converge normalement vers f et $f = \sum\limits_{-\infty}^{+\infty}c_n(f)e_n$
8. Théorème de Dirichlet : Soit $f \in L^1_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ et $x_0 \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :
   — $f(x_0 + t) \xrightarrow[\substack{t\to 0\\ t>0}]{} f^+(x_0) \in \mathbb{C}, f(x_0 + t) \xrightarrow[\substack{t\to 0\\ t<0}]{} f^-(x_0) \in \mathbb{C}$

— $\int_0^\delta \left|\frac{f(x_0+t)-f^+(x_0)}{t}\right| dt < +\infty, \int_0^\delta \left|\frac{f(x_0-t)-f^-(x_0)}{t}\right| dt < +\infty$
Alors $S_N(f)(x_0) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{f^+(x_0)+f^-(x_0)}{2}$

9. Remarque : En pratique on a souvent :
— $f(x_0+t) \underset{\substack{t\to 0\\ t>0}}{\longrightarrow} f^+(x_0) \in \mathbb{C}, f(x_0+t) \underset{\substack{t\to 0\\ t<0}}{\longrightarrow} f^-(x_0) \in \mathbb{C}$
— $\underset{\substack{t\to 0\\ t>0}}{lim} \frac{f(x_0+t)-f^+(x_0)}{t} \in \mathbb{C}, \underset{\substack{t\to 0\\ t<0}}{lim} \frac{f(x_0-t)-f^-(x_0)}{t} \in \mathbb{C}$
10. Exemple : $S_N(\sigma_\varepsilon, \varepsilon) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$, ainsi pour $a = \frac{\varepsilon}{2}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{sin(na)}{n} = \frac{\pi-a}{2}$
11. Remarque : La continuité de f ne suffit pas pour que f coïncide avec sa série de Fourier, le théorme de Banach-Steinhaus permet d'établir l'existence d'un contre-exemple

2.2 Equations de la chaleur par séries de Fourier

(Chapitre 12.6.1 de Equations différentielles de Florent Berthelin)

1. Définition : L'équation de la chaleur unidirectionnelle est de la forme $\forall t \in \mathbb{R}_+^*, x \in]0, L[, \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = 0, u(t,0) = u(t,L) = 0, u(0,x) = u_0(x)$ d'inconnue $u \in C^2(\mathbb{R}_+^* \times [0,L])$ et de paramètre $u_0 \in C^1([0,L])$
2. Proposition : Si $u(t,x) = f(t)g(x)$ solution et f, g ne s'annulant pas alors $\frac{f'(t)}{f(t)} = C = \frac{g''(x)}{g(x)}$
3. Corollaire : Dans ce cas, $f(t) = Ae^{Ct}$, puis :
— Si $C = 0$ alors $g(x) = \alpha x + \beta$, puis avec les conditions initiales $\alpha = \beta = 0$
— Si $C > 0$ alors $g(x) = \alpha e^{\sqrt{C}x} + \beta e^{-\sqrt{C}x}$, puis avec les conditions initiales $\alpha = \beta = 0$
— Si $C < 0$ alors $g(x) = \alpha cos(\sqrt{-C}x) + \beta sin(\sqrt{-C}x)$, puis avec les conditions initiales $\alpha = 0$ et $C = -\frac{k^2\pi^2}{L^2}$ avec $k \in \mathbb{N}^*$
4. Lemme : u_0 se prolonge en $u_0 \in C^1_{2\pi}(\mathbb{R})$
5. Théorème : u_0 coïncide avec sa série de Fourier $u_0(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$
6. Corollaire : La solution de l'équation de la chaleur unidirectionnelle est donc $u(t,x) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k e^{-\frac{k^2\pi^2}{L^2}t} sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$

3 Utilisation de la transformation de Fourier

3.1 Définition et propriétés

(Chapitre 5.1 de Equations aux dérivées partielles de David et Gosselet)

1. Définition : Soit $u \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\mathcal{F}(u)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} u(x)e^{-ix\xi}d\xi$ est la transformée de Fourier de u
2. Exemple : Si $u(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$ alors $\mathcal{F}(u)(\xi) = \sqrt{2\pi}e^{-\frac{x^2}{2}}$

3. Proposition : $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \longrightarrow C_0(\mathbb{R})$ est linéaire continue
4. Proposition : Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\mathcal{F}(f(id-a)) = e^{ia\xi}\mathcal{F}(f), \mathcal{F}(e^{-iax}f) = \mathcal{F}(f)(id+a)$ et $\mathcal{F}(f(ax)) = \frac{1}{|a|}\mathcal{F}(f)\left(\frac{\xi}{a}\right)$
5. Théorème : Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ tel que $xf \in L^1(\mathbb{R})$ alors $\mathcal{F}(f)$ est dérivable et $\mathcal{F}(f)'(\xi) = -i\mathcal{F}(xf)$
6. Théorème : Si $f \in C^1(\mathbb{R})$ tel que $f' \in L^1(\mathbb{R})$ alors $\mathcal{F}(f')(\xi) = i\xi\mathcal{F}(u)$
7. Théorème d'inversion de Fourier : Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ tel que $\mathcal{F}(f) \in L^1(\mathbb{R})$ alors $f = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}(\mathcal{F}(f)(-\xi))$
8. Corollaire : $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \longrightarrow C_0(\mathbb{R})$ est injective
9. Proposition : Soit $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)$

3.2 Equation de la chaleur par transformation de Fourier

(Chapitre 12.6.2 de Equations différentielles de Florent Berthelin)

1. Proposition : En appliquant la transformation de Fourier à l'équation $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, u(0,x) = u_0(x)$ on obtient, en notant $v = \mathcal{F}(u)$, $\frac{\partial v}{\partial t} = -\xi^2 v, v(0,\xi) = v_0(\xi)$
2. Corollaire : Par résolution on obtient $v = v_0 e^{-t\xi^2}$
3. Application : Par inversion de Fourier on obtient $u(t,x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{\mathbb{R}} u_0(y)e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}dy$
4. Théorème : Si u_0 continue bornée alors u définie précédemment est bien solution

3.3 Equation des ondes par transformation de Fourier

(Chapitre 7.2 de Equations aux dérivées partielles de David et Gosselet)

1. Définition : L'équation des ondes unidirectionnelle est $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, u(x,0) = u_0(x), \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = v_0(x)$ avec $u_0 \in C^2(\mathbb{R}), v_0 \in C^1(\mathbb{R})$
2. Proposition : Si $u \in S(\mathbb{R})$ solution et $g = \mathcal{F}(u)$ alors g vérifie $\frac{\partial^2 g}{\partial t^2} - c^2\xi^2 g = 0, g(\xi,0) = \mathcal{F}(u_0)(\xi), \frac{\partial g}{\partial x}(\xi,0) = \mathcal{F}(v_0)(\xi)$
3. Théorème : La fonction $u(x,t) = \frac{1}{2}(u_0(x-ct)+u_0(x+ct)) + \frac{1}{c}\int_{x-ct}^{x+ct} v_0(s)ds$ est solution de l'équation des ondes unidimensionnelle

4 Résolution par changement de coordonnées

4.1 Définitions et propriétés

(Chapitre 5.2 du Petit guide de calcul différentiel de François Rouvière)

1. Définition : Soit U ouvert de $\mathbb{R}^n$, alors on appelle changement de coordonnées sur U la donnée de n fonctions $f_1, ..., f_n : V \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $x \longmapsto f(x)$ soit un C^1-difféomorphisme de U sur un ouvert V de $\mathbb{R}^n$

2. Exemple : Si $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in GL_n(\mathbb{R})$ alors les relations $u_i = \sum\limits_{1\leq j\leq n} a_{ij}x_j$ définissent un changement linéaire de coordonnées
3. Exemple : L'application $(x, y) \longmapsto \left(\sqrt{x^2+y^2}, arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right) = (r, \theta)$ donne le passage en coordonnées polaires sur le demi-plan $\{x > 0\}$ de $\mathbb{R}^2$
4. Théorème : Soit $a \in \mathbb{R}^n$, $U \in \mathcal{V}(a)$ et $f_1, ..., f_n \in C^1(U)$, alors les relations $u_1 = f_1(x_1, ..., x_n), ..., u_n = f_n(x_1, ..., x_n)$ définissent un changement de coordonnées sur U si et seulement si $J_f(a) \neq 0$ ie $df_1(a), ..., df_n(a)$ sont des formes linéaires indépendantes sur $\mathbb{R}^n$
5. Corollaire : Soit $a \in \mathbb{R}^n$, $U \in \mathcal{V}(a)$ et $f_1, ..., f_p \in C^1(U)$, alors on peut les compléter en un changement de coordonnées sur U si et seulement si $df_1(a), ..., df_p(a)$ sont des formes linéaires indépendantes

4.2 Diminuer le nombre de variables

(Chapitre 5.2 et Exercices 72 et 64 du Petit guide de calcul différentiel de François Rouvière)

1. Proposition : Soit U ouvert de $\mathbb{R}^n, a \in U$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^p$ de classe C^1 tel que f soit une submersion en a, alors on peut compléter les fonctions $X_1 = f_1(x_1, ..., x_n), ..., X_p = f_p(x_1, ..., x_n)$ en un système de coordonnées locales $X_1, ..., X_n$ sur $\mathbb{R}^n$ sur un voisinage V de a
2. Corollaire : Dans ce cas l'application f devient la projection $X = (X_1, ..., X_n) \longmapsto (X_1, ..., X_p)$, de plus f est ouvert sur V, il n'existe aucune fonction non nulle φ tel que $\varphi \circ f = 0$ sur V et f admet localement un inverse à droite
3. Application : On considère une équation aux dérivées partielles linéaires du premier ordre $\sum\limits_{i=1}^{n} v_i(x)\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$ avec v_i continues et non simultanément nuls sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$, soit $f_1, ..., f_p$ des solutions particulières de classes C^1 de différentielles en $a \in U$ linéairement indépendantes, alors $p < n$ et l'équation peut se ramener localement à une équation du même type à $n - p$ variables
4. Exemple : On considère l'équation aux dérivées partielles $x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$, alors les solutions de classe C^1 sont de la forme $f(x, y) = h(xy)$ avec h de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ (Exemple 3.7.6 de Calcul différentiel de Mohammed El Amrani)
5. Exemple : On considère l'équation aux dérivées partielles $(y - z)\frac{\partial f}{\partial x} + (z - x)\frac{\partial f}{\partial y} + (x - y)\frac{\partial f}{\partial z} = 0$, alors les solutions sont de la forme $f(x, y, z) = \phi(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2)$ avec ϕ de classe C^1 sur l'ouvert $W = \{u^2 < 3v\} \subset \mathbb{R}^2$