Leçon 226 Suites vectorielles et réelles définies par une relation $u_{n+1} = f(u_n)$, exemples, applications à la résolution d'équations

Dorian Cacitti-Holland

2020-2021

Références.

1. Analyse de Xavier Gourdon
2. Oraux X-ENS Analyse 1
3. Contre-exemples en mathématiques de Bertrand Hauchecorne
4. Analyse numérique et équations différentielles de Jean-Pierre Demailly
5. Equations différentielles de Florent Berthelin
6. Petit guide de calcul différentiel de François Rouvière
7. Analyse matricielle de Jean-Etienne Rombaldi

Développements.

1. Méthode de Newton
2. Minimisation de fonctionnelle quadratique

Table des matières

1 Différenciation entre les suites réelles et vectorielles

1.1 Cas des suites réelles

(Chapitre 4.1 d'Analyse de Xavier Gourdon)
On considère E un espace vectoriel de dimension d, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ et $f : E \longrightarrow E$.

1. Définition : On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est récurrente d'ordre 1 si $\forall n \geq 1, u_n = f(u_{n-1})$
2. Remarque : Si $d = 1$ alors on parle de suite récurrente scalaire, si $d \geq 2$ alors on parle de suite récurrente vectorielle
3. Proposition : Si $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow I$ alors :
   — Si f croissante alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monotone et son sens de monotonie est donnée par le signe de $u_1 - u_0$
   — Si f décroissante alors $f \circ f$ croissante, d'où $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones et leur sens de monotonie est opposé
4. Théorème : Si f continue, $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$ alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(l)$, ainsi $l = f(l)$
5. Exemple : Si $u_{n+1} = u_n^2 - u_n - 3$ converge vers l alors $l \in \{-1, 3\}$
6. Théorème : Si $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ continue et $u_{n+1} = f(u_n)$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $u_{n+1} - u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (Exercice 2.19 des Oraux X-ENS Analyse 1)
7. Remarque : Ce théorème est faux pour une suite quelconque : $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ diverve mais $u_{n+1} - u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (Exemple 6.3 des Contre-exemples en mathématiques de Bertrand Hauchecorne)

1.2 Quelques exemples particuliers

(Chapitre 4.1 d'Analyse de Xavier Gourdon)
On considère $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite récurrente associée à $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

1. Définition : On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de premier terme $a \in \mathbb{R}$ et de raison $r \in \mathbb{R}$ si $u_0 = a, f(x) = x + r$
2. Proposition : Dans ce cas $u_n = a + nr$
3. Corollaire : Dans ce cas $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si seulement si $r = 0$, et dans ce cas $l = a$
4. Définition : On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de premier terme $a \in \mathbb{R}$ et de raison $r \in \mathbb{R}$ si $u_0 = a, f(x) = rx$
5. Proposition : Dans ce cas $u_n = ar^n$
6. Corollaire : Dans ce cas :
   — Si $r = 1$ alors $u_n = a$ convergente
   — Si $r = -1$ alors $u_n = a(-1)^n$ non convergente
   — Si $|r| < 1$ alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
   — Si $|r| > 1$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge

7. Définition : On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique si $f(x) = qx + a$ avec $q, a \neq 0$
8. Proposition : Dans ce cas $u_n = q^n(u_0 - r) + r$ avec $r = \frac{a}{1-q}$
9. Corollaire : Dans ce cas la convergence se déduit des corollaires précédents

1.3 Les suites vectorielles pour les suites réelles récurrentes d'ordre h

(Chapitre 4.1 d'Analyse de Xavier Gourdon)

1. Définition : On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est récurrente d'ordre $h \in \mathbb{N}^*$ si $\forall n \geq h, u_n = f(u_{n-1}, ..., u_{n-h})$ avec $f : E^h \longrightarrow E$
2. Remarque : Dans ce cas $v_n = (u_n, ..., u_{n+h-1})$ définit un suite récurrente d'ordre 1 avec $g : (x_1, ..., x_h) \in E^h \longmapsto (f(x_1, ..., x_h), x_2, ..., x_h) \in E^h$
3. Proposition : Si f est linéaire alors g est linéaire
4. Définition : On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 si $u_n = au_{n-1}+bu_{n-2}$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, de plus l'équation caractéristique est $(E) : x^2-ax-b = 0$
5. Remarque : Dans ce cas $v_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix} v_{n-1}$
6. Proposition : Dans ce cas :
   — Si (E) admet deux racines réelles distinctes x_1, x_2 alors $u_n = \lambda x_1^n + \mu x_2^n$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$
   — Si (E) admet une racine double x alors $u_n = (\lambda n + \mu)x^n$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$
   — Si (E) admet deux racines complexes conjugués $\rho e^{i\theta}, \rho e^{-i\theta}$ alors $u_n = \rho^n(\lambda cos(n\theta)+ \mu sin(n\theta))$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$
7. Exemple : La suite de Fibonacci est définie par $u_n = u_{n-1}+u_{n-2}$, donc $u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n-\varphi'^n)$ avec $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ le nombre d'or et $\varphi' = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

2 Points fixes et suites récurrentes

2.1 Théorème du point fixe de Picard

(Chapitre IV.1.1 d'Analyse numérique et équations différentielles de Jean-Pierre Demailly)

On considère E un espace métrique complet et $f : E \longrightarrow E$.

1. Définition : On dit que f est contractante si f est k-lipschitzienne avec $k < 1$
2. Théorème du point fixe : Si f est contractante alors f admet un unique point fixe $x \in E$ et pour tout $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in E, u_{n+1} = f(u_n)$, on a $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$
3. Remarque : Dans ce cas la convergence est exponentiellement rapide $d(u_n, x) \leq \frac{k^n}{1-k}d(u_0, u_1)$
4. Corollaire : Si $f : K \longrightarrow K$ avec K compact et $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ alors f admet un unique point fixe et on a la convergence du théorème précédent (Exercice 1.3.4 d'Anlyse de Xavier Gourdon)

5. Proposition : Le théorème précédent reste valable si seulement f^p est contractante
6. Application : Théorème de Cauchy-Lispchitz globalement lipschitzien : Si I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, U ouvert de $\mathbb{C}^N$, $(t_0, y_0) \in I \times U$ et $f : I \times U \longrightarrow \mathbb{C}^N$ continue et globalement lipschitzien par rapport à la variable d'état alors il existe une unique solution globale de $y' = f(t,y), y(t_0) = t_0$ (Equations différentielles de Florent Berthelin)

2.2 Classification des points fixes

(Chapitre IV.2 d'Analyse numérique et équations différentielles de Jean-Pierre Demailly)
On considère I intervalle fermé de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow I$ de classe C^1 et a point fixe de f.

1. Définition : On dit que a est un point fixe attractif s'il existe $h \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall u_0 \in [a-h, a+h], u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$
2. Proposition : Si $|f'(a)| < 1$ alors a point fixe attractif
3. Corollaire : Si f de classe C^2 alors la convergence est quadratique et le point fixe est superattractif
4. Définition : On dit que a est un point fixe répulsif s'il existe $h \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall x \in [a-h, a+h] \backslash \{a\}, |f(x) - a| > |x - a|$
5. Proposition : Si $|f'(a)| > 1$ alors a est un point fixe répulsif
6. Remarque : Dans le cas $|f'(a)| = 1$ alors on ne peut pas conclure
7. Exemple : Si $f(x) = sin(x)$ et $x_0 \in]0, \frac{\pi}{2}]$ alors $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
8. Exemple : Si $f(x) = sinh(x)$ et $x \in \mathbb{R}_+$ alors $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

2.3 Cas des suites vectorielles

(Chapitre IV.3.2 d'Analyse numérique et équations différentielles de Jean-Pierre Demailly)

On considère U ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 et a point fixe de f.

1. Remarque : On rappelle que f est différentiable s'il existe $df \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n$ tel que $f(x+h) \underset{x\to 0}{=} f(x) + df(x)(x) + o(h)$
2. Lemme : Si f est k-lipschitzienne alors $\forall x \in U, \|df(x)\| \leq k$
3. Lemme : Si U connexe et $\forall x \in U, \|df(x)\| \leq k$ alors f est k-lipschizienne
4. Théorème : On a les équivalences suivantes :
   — Il existe V voisinage fermé de a stable par f tel que $\varphi_{|V}$ soit contractante pour $\|\cdot\|$
   — $\rho(d\varphi(a)) < 1$ (avec ρ le rayon spectral)
   Dans ce cas a est attractif
5. Remarque : Si f de classe C^2 et $d\varphi(a) = 0$ alors il y a convergence quadratique

3 Résolutions d'équations par des méthodes itératives

3.1 Méthodes de Newton et de Newton-Raphson

(Chapitres 4.49 du Petit guide de calcul différentiel de François Rouvière et IV.2.4 et IV.3.3 d'Analyse numérique et équations différentielles de Jean-Pierre Demailly)

On considère $f : [c,d] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 avec $f(c) < 0 < f(d)$ et $f' > 0$.

1. Lemme : f admet un admet un unique point fixe $a \in]c,d[$ et pour tout $x \in [c,d]$, il existe $z \in [a,x]$ tel que $F(x) - a := x - \frac{f(x)}{f'(x)} - a = \frac{1}{2}\frac{f''(z)}{f'(x)}(x-a)^2$
2. Lemme : Il existe $C \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall x \in [c,d], |F(x) - a| \leq C|x-a|^2$ et il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $I = [a-\alpha, a+\alpha]$ soit stable par F
3. Théorème : Méthode de Newton : Soit $x_0 \in I$, alors $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$ avec $x_{n+1} = F(x_n)$
4. Corollaire : Si $f'' > 0$ alors $I = [a,d]$ est stable par F et pour tout $x_0 \in I$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante (ou constante) avec $0 \leq x_{n+1} - a \leq C(x_n - a)^2$ et $x_{n+1} - a \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\frac{f''(a)}{f'(a)}(x_n - a)^2$
5. Application : Soit $y \in \mathbb{R}_+^*$ et $f(x) = x^2 - y$, alors la méthode de Newton permet d'approcher $\sqrt{y}$
6. Théorème : Méthode de Newton-Raphson : Soit U ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^2 et $a \in U$ tel que $f(a) = 0$ et $df : U \longrightarrow GL(\mathbb{R}^n)$, alors a est un point fixe attractif que l'on peut approcher par la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_{n+1} = u_n - df(u_n)^{-1}(f(u_n))$
7. Exemple : On peut approcher la solution (x,y) de $\left\{\begin{array}{rcl} x^2 + xy - 2y^2 & = & 4 \\ xe^x + ye^y & = & 0 \end{array}\right.$

3.2 Résolution de systèmes linéaires par méthode itérative

(Chapitre 5.11 d'Analyse matricielle de Jean-Etienne Rombaldi)

On considère $b \in \mathbb{R}^n$ et $A \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que $A = M - N$ avec $(M,N) \in GL_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R})$.

1. Définition : La méthode itérative de la résolution de $Ax = b$ définit une suite $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ par $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n, x^{(k+1)} = M^{-1}Nx^{(k)} - M^{-1}b$
2. Remarque : Si cette suite converge alors la limite est la solution de $Ax = b$
3. Définition : On dit que la méthode itérative est convergente si pour tout $x^{(0)}$ la suite $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ définie précédemment est convergente
4. Théorème : La méthode itérative converge si et seulement si $\rho(M^{-1}N) < 1$
5. Corollaire : S'il existe une norme matricielle $\|\cdot\|$ tel que $\|M^{-1}N\| < 1$ alors la méthode itérative est convergente

3.3 Minimisation de fonctionnelle quadratique

(Chapitre 5.15 d'Analyse matricielle de Jean-Etienne Rombaldi)

On considère $A \in S_p^{++}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^p$.

1. Théorème : Soit U ouvert de $\mathbb{R}^p$ et $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiable en $x_0 \in U$ tel que φ admette un extremum local en x_0, alors $d\varphi(x_0) = 0$
2. Définition : La fonctionnelle quadratique associée à A et b est $\varphi(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle$
3. Lemme : La fonctionnelle quadratique précédente φ est différentiable sur $\mathbb{R}^p$ et $\nabla\varphi(x) = Ax - b$
4. Théorème : La solution de $Ax = b$ réalise le minimum global de la fonctionnelle φ
5. Lemme : Soit $\alpha = inf(Sp(A)) \in \mathbb{R}_+^*$, alors $\forall x \in \mathbb{R}^p, \langle Ax, x\rangle \geq \alpha \|x\|^2$
6. Proposition : La fonctionnelle quadratique précédente φ est différentiable sur $\mathbb{R}^n$ et $\nabla f(x) = Ax - b$
7. Corollaire : Pour tout $x \in \mathbb{R}^p$, $H_f(x) = A \in S_p^{++}(\mathbb{R})$, donc f est strictement convexe
8. Propositon : f est coercive, ie $f(x) \underset{\|x\| \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$
9. Théorème : La solution de $Ax = b$ réalise l'unique minimum global de la fonctionnelle φ
10. Théorème : Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $x_{n+1} = x_n - \rho_n \nabla f(x_n)$ avec $\forall n \in \mathbb{N}, \rho_n = \underset{\rho\in\mathbb{R}_+^*}{argmin}(f(x_n - \rho\nabla f(x_n))$, alors $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x_*$ avec $x_* \in \mathbb{R}^p$ unique minimum global de f
11. Application : On peut donc approcher numériquement la solution $x \in \mathbb{R}^p$ de $Ax = b$

3.4 Recherche de valeurs et vecteurs propres

(Chapitre 6.3 d'Analyse matricielle de Jean-Etienne Rombaldi)
On considère $A \in S_n(\mathbb{R})$.

1. Remarque : Par théorème spectral A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et on chercher à construire $(R(\theta_k))_{k\in\mathbb{N}}$ suite de matrices de rotations pour que $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice diagonale avec $A_{k+1} = R(\theta_k)^{-1} A_k R(\theta_k)$,
2. Définition : Soit $(p, q, \theta) \in [\![1, n]\!]^2 \times \mathbb{R}$ tel que $p < q$, alors $R_{p,q}(\theta) = \begin{pmatrix} I_{p-1} & 0 & 0 \\ 0 & \rho_{p,q}(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-q} \end{pmatrix}$ avec $\rho_{p,q}(\theta) = \begin{pmatrix} c & 0 & -s \\ 0 & I_{q-p+1} & 0 \\ s & 0 & c \end{pmatrix}$, $c = cos(\theta), s = sin(\theta)$
3. Lemme : Les coefficients de $A_{p,q}(\theta) := R_{p,q}(\theta)^{-1} A R_{p,q}(\theta)$ symétrique sont donnés par
$$\begin{cases} m'_{ij} = m_{ij} & si \quad i \neq p, q, j \neq p, q \\ m'_{ip} = cm_{ip} + sm_{iq} & si \quad i \neq p, q \\ m'_{pp} = c^2 m_{pp} + s^2 m_{qq} + 2csm_{pq} & \\ m'_{iq} = cm_{iq} - sm_{ip} & si \quad i \neq p, q \\ m'_{qq} = s^2 m_{pp} + c^2 m_{qq} - 2csm_{pq} & \\ m'_{pq} = (c^2 - s^2) m_{pq} - sc(m_{pp} - m_{qq}) & \end{cases}$$
4. Lemme : Si $m_{pq} \neq 0$ alors il existe un unique $\theta \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \setminus \{0\}$ tel que $m'_{pq} = 0$

5. Lemme : Soit $A_{k+1} = R(\theta_k)^{-1} A_k R(\theta_k)$ avec $R(\theta_k) = I_n$ si $a_{pq}^{(k)}$ et $R(\theta_k) = R_{p,q}(\theta_k)$ avec $1 \leq p < q \leq n$ tel que $|a_{pq}^{(k)}| = \underset{1 \leq i < j \leq n}{max} |a_{ij}^{(k)}|$ et $\theta_k \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \setminus \{0\}$ tel que $a_{pq}^{(k+1)} = 0$, et $A_k = D_k + E_k$ avec D_k partie diagonale de A_k, alors $E_k \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} 0$
6. Théorème : $A_k \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} D_\sigma$ avec D_σ matrice diagonale de termes diagonaux $\lambda_{\sigma(i)}$, $\sigma \in \mathcal{S}_n$ et $\lambda_1, ..., \lambda_n$ les valeurs prorpes de A
7. Corollaire : $\theta_k \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} 0, R_k \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} I_n$ et $P_k := R(\theta_0)...R(\theta_k) \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} P_\sigma = (\pm C_{\sigma(1)}, ... \pm C_{\sigma(n)})$ avec $\sigma \in \mathcal{S}_n$ et $C_{\sigma(i)}$ vecteur propre de A associé à $\lambda_{\sigma(i)}$