Leçon 229 Fonctions monotones, fonctions convexes, exemples et applications

Dorian Cacitti-Holland

2020-2021

Références.

1. Topologie et éléments d'analyse de Ramis, Deschamps et Odoux
2. Les contre-exemples en mathématiques de Bertrand Hauchecorne
3. Analyse de Xavier Gourdon
4. Eléments d'analyse réelle de Jean-Etienne Rombaldi
5. Suites et séries de Mohammed El Amrani
6. Petit guide de calcul différentiel de François Rouvière
7. Théorie de l'intégration de Briane et Pagès
8. Analyse matricielle de Jean-Etienne Rombaldi
9. Oraux X-ENS Analyse 4

Développements.

1. Méthode de Newton
2. Minimisation de fonctionnelle quadratique

Table des matières

1 Fonctions monotones

1.1 Définitions et premières propriétés

(Chapitre 4.3.1 de Topologie et éléments d'analyse de Ramis, Deschamps et Odoux)

On considère $D \subset \mathbb{R}$ et $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$.

1. Définition : On dit que f est croissante (respectivement décroissante) si $\forall (x, y) \in D^2, x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ (respectivement $\forall (x, y) \in D^2, x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$), et on dit que f est monotone si f est croissante ou décroissante
2. Exemple : $x \longmapsto x^2$ est décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$
3. Proposition : Si f monotone alors f injective si et seulement si f strictement monotone
4. Corollaire : Dans ce cas f est bijective de D dans $f(D)$
5. Proposition : Les espaces des fonctions croissantes $\mathcal{F}_+$ et des fonctions décroissantes $\mathcal{F}_-$ sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels
6. Proposition : Si $(f, g) \in \mathcal{F}_+^2$ positives alors $fg \in \mathcal{F}_+$
7. Proposition : Si $(f, g) \in \mathcal{F}_+^2$ ou $(f, g) \in \mathcal{F}_-^2$ alors $f \circ g \in \mathcal{F}_+$ et si $(f, g) \in \mathcal{F}_+ \times \mathcal{F}_-$ alors $f \circ g \in \mathcal{F}_-$
8. Théorème de la limite monotone : Si f monotone et $a \in \overline{D}$ alors f admet une limite finie ou finie en a
9. Corollaire : Si $f \in \mathcal{F}_+$ et $a \in \overline{D}$ alors f admet une limite à droite finie en a si et seulement si f est minorée au voisinage de a
10. Corollaire : Si $D = I$ intervalle de $\mathbb{R}$ et f monotone et $a \neq sup(I)$ alors f admet une limite à droite finie en a

1.2 Régularité des fonctions monotones

(Chapitres 4.3.2 et 4.3.3 de Topologie et éléments d'analyse de Ramis, Deschamps et Odoux)

On considère I intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.

1. Théorème : Si f monotone sur I alors f admet au plus un nombre dénombre de discontinuités
2. Théorème : Si f monotone sur I alors f continue si et seulement si $f(I)$ est un intervalle
3. Corollaire : Théorème des fonctions réciproques : Si f continue strictement monotone alors f homéomorphisme de I dans $f(I)$ intervalle de $\mathbb{R}$
4. Remarque : On a besoin que I soit un intervalle
5. Exemple : Une bijection $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}$ est continue mais sa réciproque est discontinue (Exemple 8.21 des Contre-exemples en mathématiques de Bertrand Hauchecorne)
6. Théorème : Si f homéomorphisme alors f strictement monotone
7. Théorème : Si f dérivable alors f croissante si et seulement si $f' \geq 0$
8. Théorème de caractérisations des applications strictement monotones : Si f continue et dérivable à droite alors f strictement croissante si et seulement si $f'_d \geq 0$ et $\{x \in I, f_d(x)\}$ est d'intérieur vide

1.3 Suites croissante de fonctions et suites de fonctions croissantes

(Chapitre 4.3 d'Analyse de Xavier Gourdon et 10.4 de Probabilités de Jean-Yves Ouvrard)
On considère I intervalle de $\mathbb{R}$ et $f_n, f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.

1. Définition : On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f (respectivement uniformément) si $\forall x \in I, f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$ (respectivement $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$
2. Remarque : La convergence uniforme implique la convergence simple mais l'inverse est faux en général
3. Exemple : Si $I = [0,1]$ et $f_n(x) = x^n$ alors $f_n \underset{n\to+\infty}{\overset{CVS}{\longrightarrow}} \delta_1$ mais pas uniformément
4. Premier théorème de Dini : Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite croissante de fonctions continues telle que $f_n \underset{n\to+\infty}{\overset{CVS}{\longrightarrow}} f$ continue alors $f_n \underset{n\to+\infty}{\overset{CVU}{\longrightarrow}} f$ (Exercice 4.3.4 d'Analyse de Xavier Gourdon)
5. Second théorème de Dini : Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de fonctions croissantes continues telles que $f_n \underset{n\to+\infty}{\overset{CVS}{\longrightarrow}} f$ continue alors $\underset{n\to+\infty}{\overset{CVU}{\longrightarrow}} f$ (Exercice 4.3.4 d'Analyse de Xavier Gourdon)
6. Application : Théorème de Glivenko-Cantelli (admis) : Soit $(X_1, ..., X_n)$ un n-échantillon de X et $F_n(x,\omega) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \mathbb{1}_{X_i \leq t}(\omega)$, alors $\mathbb{P}\left(\|F_n - F\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0\right) = 1$

2 Fonctions convexes

2.1 Définitions et premières propriétés

(Chapitre 8.1 des Eléments d'analyse réelle de Jean-Etienne Rombaldi)
On considère I convexe d'un espace vectoriel normé E et $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$.

1. Définition : On dit que f est convexe (respectivement concave) si $\forall (x,y) \in I^2, \forall \lambda \in [0,1], f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$ (respectivement si $-f$ est convexe)
2. Exemple : $\|\cdot\|, exp$
3. Proposition : Une fonction affine est convexe et concave
4. Proposition : Une combinaison linaire à coefficients positifs de fonctions convexes est convexes
5. Remarque : Le produit de fonctions convexes n'est pas nécessairement convexe : $x^3 = xx^2$ n'est pas convexe mais x et x^2 le sont
6. Proposition : Si f convexe croissante et g convexe alors $f \circ g$ est convexe
7. Remarque : La composition de fonctions convexes n'est pas nécessairement convexe
8. Exemple : Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe non affine alors $f \circ -id_{\mathbb{R}}$ concave non convexe (car non affine)
9. Proposition : Une limite simple de fonctions convexes est convexe
10. Proposition : Si f et g convexes alors $max(f,g)$ est convexe

2.2 Caractérisations de la convexité

(Chapitres 8.1 et 8.2 des Eléments d'analyse réelle de Jean-Etienne Rombaldi)

1. Définition : L'épigraphe de f est $Epi(f) := \{(x, y) \in I \times \mathbb{R}, y \geq f(x)\}$
2. Théorème : f convexe si et seulement si $Epi(f)$ convexe
3. Théorème : f convexe si et seulement si pour tout $(a, b) \in I^2$, la courbe de la restriction de f à $[a, b]$ est en dessous du segment $[(a, f(a)), (b, f(b))]$
4. Corollaire : Dans le cas où f est strictement convexe, toute droite coupe le graphe de f en au plus deux points
5. Théorème : f convexe si et seulement si $t \longmapsto f((1-t)x + ty)$ convexe sur $[0, 1]$
6. Théorème : Si I intervalle réel alors les assertions suivantes sont équivalentes :
   — f convexe
   — $\forall x < y < z \in I, p(x, y) \leq p(x, z) \leq p(y, z)$ (inégalité des pentes)
   — Pour tout $a \in I, \tau_a : x \longmapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ croissante sur $I \backslash \{a\}$
7. Corollaire : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est affine si et seulement si f convexe et concave

2.3 Cas particulier quand la fonction est continue, dérivable ou différentiable

(Chapitre 8.2 des Eléments d'analyse réelle de Jean-Etienne Rombaldi)

1. Théorème : Si f continue alors f convexe si et seulement si $\forall (x, y) \in I^2, f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$
2. Théorème : Si f continue sur I et convexe sur $\overset{\circ}{I}$ alors f convexe sur I
3. Théorème : Si f convexe et dérivable en $a \in \overset{\circ}{I}$ de dérivée $f'(a) = 0$ alors f admet un minimum local en a
4. Remarque : La convexité est nécessaire
5. Exemple : x^3 en 0
6. Théorème : Si f convexe et admet un minimum local alors ce minimum est global
7. Théorème : Si f dérivable sur I alors les assertions suivantes sont équivalentes :
   — f convexe sur I
   — f' croissante sur I
   — La courbe de f est située au dessus de sa tangente en tout point de I
8. Si I ouvert convexe de E et f différentiable alors les assertions suivantes sont équivalentes :
   — f convexe
   — $\forall (x, y) \in I^2, (df(x) - df(y))(x - y) \geq 0$
   — $\forall (x, y) \in I^2, f(x) \geq f(y) + df(y)(x - y)$
9. Théorème : Si f deux fois dérivable alors f convexe si et seulement si $f'' \geq 0$

2.4 Régularité des fonctions convexes

(Chapitre 8.2 des Eléments d'analyse réelle de Jean-Etienne Rombaldi)

1. Théorème : Si f convexe alors pour tout $[a,b] \subset I$, $f_{|[a,b]}$ est lipschitzienne
2. Corollaire : Si f convexe alors f continue
3. Théorème : Si f convexe alors f admet des dérivées à droite et à gauche qui vérifient $\forall (a<b) \in \overset{\circ}{I}^2, f'_g(a) \leq f'_d(a) \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq f'_g(a) \leq f'_d(b)$
4. Remarque : On retrouve le corollaire précédent, si f convexe alors f continue sur $\overset{\circ}{I}$
5. Théorème : f convexe si et seulement si f continue et dérivable à droite de dérivée droite f'_d croissante

3 Applications des fonctions convexes et monotones

3.1 Etude de suites récurrentes

(Chapitres 1.5 de Suites et série de Mohammed El Amrani et 4.49 du Petit guide de calcul différentiel de François Rouvière)

On considère I interalle de $\mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in I^{\mathbb{N}}$.

1. Définition : On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est une suite récurrente d'ordre 1 s'il existe $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que $u_{n+1} = f(u_n)$
2. Proposition : Dans ce cas, si f croissante alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monotone et si f décroissante alors $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones de sens de variation opposées
3. Théorème : Soit $I =]a,b[\subset \mathbb{R}, l \in \mathbb{R}, f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, alors f continue en l si et seulement si $\forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in]a,b[^{\mathbb{N}}, u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l \Longrightarrow f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(l)$
4. Corollaire : Si $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$ alors l point fixe de f
5. Exemple : Si $u_{n+1} = sin(u_n)$ alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
6. Théorème : Méthode de Newton : Soit $f : [c,d] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 avec $f(c) < 0 < f(d)$ et $f' > 0$, $x_0 \in I$, alors $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$ avec $x_{n+1} = F(x_n) := x - \frac{f(x)}{f'(x)}$
7. Lemme : Dans ce cas, f admet un admet un unique point fixe $a \in]c,d[$ et pour tout $x \in [c,d]$, il existe $z \in [a,x]$ tel que $F(x) - a = \frac{1}{2}\frac{f''(z)}{f'(x)}(x-a)^2$
8. Lemme : Il existe $C \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall x \in [c,d], |F(x)-a| \leq C|x-a|^2$ et il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $I = [a-\alpha, a+\alpha]$ soit stable par F
9. Corollaire : Si $f'' > 0$ alors $I = [a,d]$ est stable par F et pour tout $x_0 \in I$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante (ou constante) avec $0 \leq x_{n+1} - a \leq C(x_n - a)^2$ et $x_{n+1} - a \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\frac{f''(a)}{f'(a)}(x_n - a)^2$
10. Application : Soit $y \in \mathbb{R}_+^*$ et $f(x) = x^2 - y$, alors la méthode de Newton permet d'approcher $\sqrt{y}$

3.2 Inégalités de convexité

(Chapitre 8.3 des Eléments d'analyse réelle de Jean-Etienne Rombaldi)

1. Lemme : Soit $(p,q) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et $(u,v) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, alors $u^{\frac{1}{p}} v^{\frac{1}{q}} \leq \frac{1}{p}u + \frac{1}{q}v$
2. Corollaire : Soit $(p,q) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, alors $ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$
3. Application : Inégalité de Hölder : Soit $(f,g) \in L^p(\mathbb{R}) \times L^q(\mathbb{R})$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$ (Chapitre 9.2 de Théorie de l'intégration de Briane et Pagès)
4. Application : Inégalité de Minkoski : Soit $(f,g) \in L^p(\mathbb{R})^2$, alors $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ (Chapitre 9.2 de Théorie de l'intégration de Briane et Pagès)
5. Proposition : $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \frac{2}{\pi}x < sin(x) < x$
6. Théorème de Jensen : Soit I convexe de E et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, alors f est convexe si et seulement si, pour toute combinaison linéaire convexe $\sum\limits_{i=1}^{p}\lambda_i x_i \in I, f\left(\sum\limits_{i=1}^{p}\lambda_i x_i\right) \leq \sum\limits_{i=1}^{p}\lambda_i f(x_i)$
7. Corollaire : Dans ce cas, pour toute combinaison linéaire à coefficients réels positifs non tous nuls $\sum\limits_{i=1}^{p}\lambda_i x_i \in I, f\left(\frac{1}{\lambda}\sum\limits_{i=1}^{p}\lambda_i x_i\right) \leq \frac{1}{\lambda}\sum\limits_{i=1}^{p}\lambda_i f(x_i)$
8. Théorème : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe et $u : [a,b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, alors $f\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b u(t)dt\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u(t))dt$

3.3 Etude de fonctionnelles quadratiques

(Chapitre 5.15 d'Analyse matricielle de Jean-Etienne Rombaldi)
On considère $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$.

1. Théorème : Soit U ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiable en $x_0 \in U$ tel que φ admette un extremum local en x_0, alors $d\varphi(x_0) = 0$
2. Définition : La fonctionnelle quadratique associée à A et b est $\varphi(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle$
3. Lemme : La fonctionnelle quadratique précédente φ est différentiable sur $\mathbb{R}^n$ et $\nabla\varphi(x) = Ax - b$
4. Théorème : La solution de $Ax = b$ réalise le minimum global de la fonctionnelle φ
5. Remarque : On considère de plus $(\delta_k)_{k\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$ unitaires, $x_{k+1} = x_k - \frac{\langle r_k, \delta_k\rangle}{\langle A\delta_k, \delta_k\rangle}\delta_k$ avec $r_k = \nabla\varphi(x_k) = Ax_k - b = A(x_k - u)$
6. Lemme : $r_{k+1} \perp \delta_k$
7. Lemme : Soit $0 < \lambda_1 \leq ...\lambda_n$ les valeurs propres de A, alors $\forall x \in \mathbb{R}^n, \langle Ax, x\rangle \geq \lambda_1 \|x\|_2^2$
8. Théorème : S'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall k \in \mathbb{N}, \langle r_k, \delta_k\rangle \geq \alpha \|r_k\|_2$ alors la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers la solution de $Ax = b$
9. Théorème : Méthode de gradient à pas optimal : Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $x_{n+1} = x_n - \rho_n\nabla f(x_n)$ avec $\forall n \in \mathbb{N}, \rho_n = \underset{\rho\in\mathbb{R}_+^*}{argmin}(f(x_n - \rho\nabla f(x_n)))$, alors $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x_*$ avec $x_* \in \mathbb{R}^p$ unique minimum global de f